Exercice 01

On utilisant la relation $\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi}$, compléter le tableau suivant :

Mesure en degrés β	$33°$		$150°$		$80°$	
Mesure en radians α		$\frac{3\pi}{8}rad$		$\frac{\pi}{10}rad$		$\frac{\pi}{9}$

Solution de l'exercice 01

1) $\beta = 33 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{60}$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{8} \times \frac{180}{\pi} = 67{,}5°$

3) $\beta = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$; 4) $\alpha = \frac{\pi}{10} \times \frac{180}{\pi} = 18°$

5) $\beta = 80 \times \frac{\pi}{180} = \frac{8\pi}{9}$; 6) $\alpha = \frac{\pi}{9} \times \frac{180}{\pi} = 20°$

Mesure en degrés β	$33°$	$67,5°$	$150°$	$18°$	$80°$	$20°$
Mesure en radians α	$\frac{11\pi}{60}$	$\frac{3\pi}{8}rad$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}rad$	$\frac{8\pi}{9}$	$\frac{\pi}{9}$

Exercice 02

1) Déterminer l'abscisse principale du point $M\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$

2) Représenter sur le cercle trigonométrique les points A,B,C,D ; E et F d'abscisses curvilignes respectives $\frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{-4\pi}{3}$

Solution de l'exercice 02

1) Déterminons l'abscisse principale du point $M\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$:

On a $\frac{-11\pi}{6} \notin]-\pi,\pi]$ donc $\frac{-11\pi}{6}$ n'est pas l'abscisse curviligne principale de M.

✶ **1ère méthode :**

On a $\frac{-11\pi}{6} = \frac{\pi-12\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 2\pi$ donc $\frac{\pi}{6}$ est aussi uneabscisse curviligne du point M

Puisque $\frac{\pi}{6} \in]-\pi,\pi]$,alors $\frac{\pi}{6}$ est l'abscisse curviligne principale du point M

✶ **2ème méthode :**

Soit α l'abscisse curviligne principale du point M, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\frac{-11\pi}{6} = \alpha + k(2\pi)$ $avec$ $-\pi < \alpha \leq \pi$

C'est-à-dire : $\alpha = \frac{-11\pi}{6} - 2k\pi$, $-\pi < \frac{-11\pi}{6} - 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $\alpha = \frac{-11\pi}{6} - 2k\pi$, $-1 + \frac{11}{6} < -2k \leq 1 + \frac{11}{6}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $\alpha = \frac{-11\pi}{6} - 2k\pi$, $\frac{5}{6} < -2k \leq \frac{17}{6}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $\alpha = \frac{-11\pi}{6} - 2k\pi$, $\frac{-17}{12} < k \leq \frac{-5}{12}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $\alpha = \frac{-11\pi}{6} - 2k\pi$, $-1,41 < k \leq -0,41$ et $k \in \mathbb{Z}$

Or $k \in \mathbb{Z}$ donc $k = -1$, et par suite $\alpha = \frac{-11\pi}{6} - 2 \times (-1)\pi = \frac{\pi}{6}$

2) Représentons sur le cercle trigonométrique les points A,B,C,D et E d'abscisses curvilignes respectives $\frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{-4\pi}{3}$

- On a $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{3}rad = 60°$
- Noter que : $\widehat{IOB} = \frac{\pi}{2}rad = 90°$
- On a : $\frac{3\pi}{2} = \frac{4\pi-\pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2}$

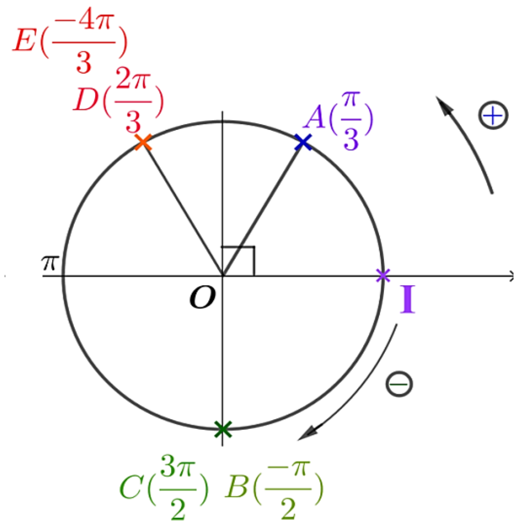
Donc $-\frac{\pi}{2}$ est aussi une abscisse curviligne du point C ,d'où C est confondu avec B.

- On a : $\widehat{IOD} = \frac{2\pi}{3}rad = 120°$

On a : $\frac{-4\pi}{3} = \frac{-6\pi+2\pi}{3} = -2\pi + \frac{2\pi}{3}$

Donc $\frac{2\pi}{3}$ est aussi une abscisse curviligne du point E ,

Alors E et D sont confondus



Exercice 03

1) Déterminer l'abscisses curviligne principale de $\frac{27\pi}{4}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique, les points M et N tels que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{9\pi}{4}$ rad et l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{ON})$ mesure $\frac{8\pi}{3}$ rad

3) Soient $(\widehat{Ox,Oy})$ et $(\widehat{Oy,Oz})$ deux angles orientés de mesures principales respectives $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminons la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oz})$.

Solution de l'exercice 03

1) On choisit un multiple de 4 proche de 27, soit 28 :

$$\frac{27\pi}{4} = \frac{28\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 7\pi - \frac{\pi}{4}$$

- Dans 7ρ, on fait apparaître un multiple de 2π, soit 6π :

$$\frac{27\pi}{4} = 6\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 6\pi + \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 6\pi + \frac{3\pi}{4}$$

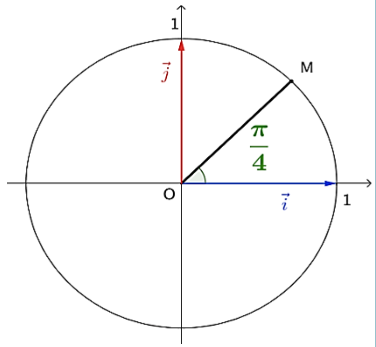
6π correspond à 3 tours entiers.

$\frac{3\pi}{4}$ est bien compris entre $-\pi$ exclu et π.

La mesure principale de $\frac{27\pi}{4}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

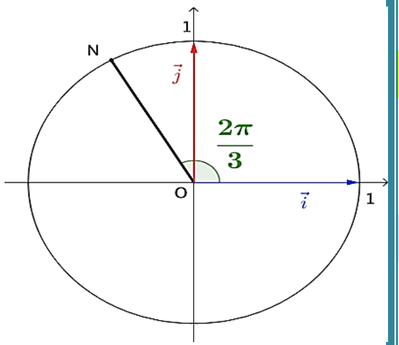
2) *a)* $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$

Le point M se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{\pi}{4}$ rad.



b) $\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$

Le point N se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{ON})$ mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad.



3) D'après la relation de Chasles pour les mesures d'angles on a

$$(\widehat{Ox,Oz}) = (\widehat{Ox,Oy}) + (\widehat{Oy,Oz}) + k(2\pi)\ \ (k \in \mathbb{Z})$$
$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + k(2\pi)\ \ (k \in \mathbb{Z})$$

Donc : $(\widehat{Ox,Oz}) = \frac{17\pi}{12} + k(2\pi)\ \ (k \in \mathbb{Z})$

Donc $\frac{17\pi}{12}$ est une abscisse curviligne de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oz})$

Or $\frac{17\pi}{12} \notin]-\pi,\pi]$ (car $\frac{17\pi}{12} > \pi$)

Alors $\frac{17\pi}{12}$ n'est pas mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oz})$

✶ **1ère méthode :** On a : $\frac{17\pi}{12} = \frac{24\pi-7\pi}{12} = 2\pi - \frac{7\pi}{12}$

Donc la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oz})$ est $-\frac{7\pi}{12}$.

✶ **2ème méthode :**

Soit α la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oz})$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\frac{17\pi}{12} = \alpha + k(2\pi)$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$

Donc $-\pi < \frac{17\pi}{12} - k(2\pi) \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Equivaut à : $-1 - \frac{17}{12} < -2k \leq 1 - \frac{17}{12}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $-\frac{29}{12} < -2k \leq -\frac{5}{12}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $\frac{5}{24} < k \leq \frac{29}{24}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $0,2 < k \leq 1,2$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 1$, d'où $\alpha = \frac{17\pi}{12} - 1 \times 2\pi = -\frac{7\pi}{12}$

Exercice 04

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $(\overline{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Déterminer : $(\overline{-\vec{u},\vec{v}})$; $(\overline{-\vec{u},-\vec{v}})$; $(\overline{\vec{u},-\vec{v}})$; $(\overline{\vec{v},-\vec{u}})$

Solution de l'exercice 04

On a : $(\overline{-\vec{u},\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u},\vec{v}}) + \pi[2\pi]$ *donc* $(\overline{-\vec{u},\vec{v}}) \equiv \frac{\pi}{3} + \pi[2\pi]$

On a : $(\overline{-\vec{u},-\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u},\vec{v}})[2\pi]$ *donc* $(\overline{-\vec{u},-\vec{v}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice 05

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = \frac{3}{4}$;

Calculer $\cos x$.

2) Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $-\pi \leq y \leq -\frac{\pi}{2}$ et $\sin y = -\frac{2}{5}$;

Calculons $\cos y$.

Solution de l'exercice 05

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = \frac{3}{4}$; Calculons $\cos x$.

On sait que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$;

Donc $\cos^2 x = 1 - \frac{3^2}{4^2} = \frac{16-9}{16} = \frac{7}{16}$

C'est-à-dire : $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ *ou* $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

Or $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ alors $\cos x \geq 0$

D'où $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$

2) Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $-\pi \leq y \leq -\frac{\pi}{2}$ et $\sin y = -\frac{2}{5}$; Calculons $\cos y$.

On sait que : pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$

Donc $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$;

Donc $\cos^2 y = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$

C'est-à-dire : $\cos y = \frac{\sqrt{21}}{5}$ *ou* $\cos y = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

Puisque $-\pi \leq y \leq -\frac{\pi}{2}$ alors $\cos y \leq 0$

D'où $\cos y = -\frac{\sqrt{21}}{4}$

Exercice 06

1) Calculer les rapports trigonométriques des nombres réels suivants : 9π ; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{-4\pi}{3}$

2) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{14\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{16\pi}{13}\right)$$

$$B = \cos(2022\pi) + \cos(2023\pi) + 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$C = \sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \sin^2\left(\frac{17\pi}{22}\right) + \sin^2\left(\frac{9\pi}{22}\right)$$

Solution de l'exercice 06

1) Calculer les rapports trigonométriques de 9π ; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{-4\pi}{3}$

✓ *On a :* $9\pi = \pi + 4 \times 2\pi$ *donc :*

$\cos(9\pi) = \cos(\pi + 4 \times 2\pi) = \cos\pi = -1$ et

$\sin(9\pi) = \sin(\pi + 4 \times 2\pi) = \sin\pi = 0$

✓ $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (car $\cos(-x) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$)

➢ $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(car $\sin(-x) = -\sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$)

✓ *On a :* $\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi+2\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi$

Donc : $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin(\pi) = 0$

(car $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ pour tout x de $\mathbb{R}$)

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \cos(\pi) = -1$

(Car $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ pour tout x de $\mathbb{R}$)

✓ *On a :* $\frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi-\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$

Donc : $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

✓ *On a :* $\frac{4\pi}{3}=\frac{3\pi+\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$

Donc : $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

(car $\begin{cases}\cos(-x)=\cos x\\ \cos(\pi+x)=-\cos x\end{cases}$)

$$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(Car $\begin{cases}\sin(-x)=-\sin x\\ \sin(\pi+x)=-\sin x\end{cases}$)

2) **Simplifier les expressions suivantes**

$A=\sin\left(\frac{\pi}{13}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{13}\right)+\sin\left(\frac{14\pi}{13}\right)+\sin\left(\frac{16\pi}{13}\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{13}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{13}\right)+\sin\left(\frac{13\pi+\pi}{13}\right)+\sin\left(\frac{13\pi+3\pi}{13}\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{13}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{13}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{13}\right)+\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{13}\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{13}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{13}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{13}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{13}\right)$

$=0$

$B=\cos(2022\pi)+\cos(2023\pi)+2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

$B=\cos(0)+\cos(\pi)+2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{7\pi+\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{7\pi-\pi}{7}\right)$

$B=1-1+2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

$B=2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$B=0$

$C=\sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{11}\right)+\sin^2\left(\frac{17\pi}{22}\right)+\sin^2\left(\frac{9\pi}{22}\right)$

$C=\sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{11}\right)+\sin^2\left(\frac{11\pi+6\pi}{22}\right)+\sin^2\left(\frac{11\pi-2\pi}{22}\right)$

$C=\sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{11}\right)+\sin^2\left(\frac{11\pi}{22}+\frac{6\pi}{22}\right)+\sin^2\left(\frac{11\pi}{22}-\frac{2\pi}{22}\right)$

$C=\sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{11}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{11}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{11}\right)$

$C=\sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{11}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{11}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{11}\right)$

$=1+1$

$=2$

Exercice 07

1) **Déterminer** $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\frac{55\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

2) **Soit** $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ **tel que** $\sin(x)=\frac{4}{5}$ **; caluler** $\sin(x)$

Solution de l'exercice 07

1) **Déterminer** $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\frac{55\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

- $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$
- $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}/2$
- $\cos\left(\frac{55\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{54\pi+\pi}{3}\right)=\cos\left(18\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=1/2$
- $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=1/2$

1) **Soit** $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ **tel que** $\sin(x)=\frac{4}{5}$ **; caluler** $\sin(x)$ **et** $\tan(x)$

On a : $\sin^2x+\cos^2x=1$ donc : $\cos^2x=1-\sin^2x$

Donc : $\cos^2x=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2$ Donc : $\cos^2x=\frac{9}{25}$

Donc : $\cos x=\frac{3}{5}$ *ou* $\cos x=-\frac{3}{5}$

Et on a : $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ donc $\cos x<0$

$$Donc\ \cos x=-\frac{3}{5}$$

Exercice 08

1) Simplifier les expressions suivantes :

$$A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$$

$$B=\sin^4 x-\cos^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x$$

2) Montre que pour tout $\in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin^4 x+\cos^4 x+2(1-\cos^2 x)\cos^2 x=1$$

Solution de l'exercice 08

1) Simplifier les expressions suivantes :

$A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$

$=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x$

$=2\cos^2 x+2\sin^2 x$

$=2(\cos^2 x+\sin^2 x)$

$=2$

$B=\sin^4 x-\cos^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x$

$=(\sin^2 x)^2-(\cos^2 x)^2-\sin^2 x+\cos^2 x$

$=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)-(\sin^2 x-\cos^2 x)$

$=(\sin^2 x-\cos^2 x)-(\sin^2 x-\cos^2 x)$

$=0$

2) Montre que pour tout $\in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin^4 x+\cos^4 x+2(1-\cos^2 x)\cos^2 x=1$$

$C=\sin^4 x+\cos^4 x+2(1-\cos^2 x)\cos^2 x$

$=\sin^4 x+\cos^4 x+2\cos^2 x-2\cos^4 x$

$=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$

$=(\sin^2 x)^2-(\cos^2 x)^2+2\cos^2 x$

$=(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)+2\cos^2 x$

$=\sin^2 x-\cos^2 x+2\cos^2 x$

$=\sin^2 x+\cos^2 x$

$=1$

Exercice 09

1) Calculer $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

2) Simplifier les expressions suivantes :

$$A=\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right)$$

Solution de l'exercice 09

1) Calculons $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)$:

On a

$$\frac{11\pi}{6}=\frac{-\pi+12\pi}{6}=\frac{-\pi}{6}+2\pi$$

Donc : $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{-\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Calculons $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$:

On a :

$$\frac{3\pi}{4}=\frac{4\pi-\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$$

Donc

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

3) Simplifier les expressions suivantes :

$A=\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

$A=\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{7\pi-3\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{7\pi-\pi}{7}\right)$

$=\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\tan\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+\tan\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

$=\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)\quad=0$

$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right)$

$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{7\pi-2\pi}{14}\right)\right)$

$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)\right)$

$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)$

$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)$

$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)$

$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)$

$=1$

Exercice 10

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos x=\frac{1}{2}$

b) Résoudre dans $[-2\pi;2\pi]$ l'équation (E) : $\cos x=\frac{1}{2}$

2) a) Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation (I): $\cos x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Résoudre dans $[-\pi;0]$ l'inéquation (I_2): $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Résoudre dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'inéquation (I_2): $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'inéquation (I_2): $\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution de l'exercice 10

1)a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos x=\frac{1}{2}$

On a $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ donc $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Equivaut à : $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

D'où l'ensemble des solutions de l'equation (E) est :

$$S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$$

b)Résolvons dans l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$ l'équation (E) : $\cos x=\frac{1}{2}$

Les solutions de l'équation (E) dans $[-2\pi;2\pi]$ sont de la forme :

$$-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\text{ ou }\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \text{ avec }(k\in\mathbb{Z})$$

Donc $-2\pi\leq-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq2\pi$ ou $-2\pi\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq2\pi$

- $-2\pi\leq-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq2\pi$ équivaut à : $-2+\frac{1}{3}\leq2k\leq2+\frac{1}{3}$

  équivaut à : $-\frac{5}{6}\leq k\leq\frac{7}{6}$

Donc : $k=0$ ou $k=1$ (car $k\in\mathbb{Z}$)

Si $k=0$ alors $-\frac{\pi}{3}+2k\pi=-\frac{\pi}{3}+0=-\frac{\pi}{3}$

Si $k=1$ alors $-\frac{\pi}{3}+2k\pi=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$

Donc : $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$ sont des solutions de (E) dans $[-2\pi;2\pi]$.

- $-2\pi\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq2\pi$ équivaut à : $-2-\frac{1}{3}\leq2k\leq2-\frac{1}{3}$

  équivaut à : $-\frac{7}{6}\leq k\leq\frac{5}{6}$

  C'est-à-dire : $k=-1$ ou $k=0$ (car $k\in\mathbb{Z}$)

Si $k=-1$ alors $\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5\pi}{3}$

Si $k=0$ alors $\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{\pi}{3}+0=\frac{\pi}{3}$

Donc : $-\frac{5\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont des solutions de (E) dans $[-2\pi;2\pi]$.

Et par suite l'ensemble des solutions de (E) dans $[-2\pi;2\pi]$ est :

$S=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3};-\frac{5\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

a) Résolvons dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'inéquation (I): $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

➢ **Résolvons dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'équation (E) : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$**

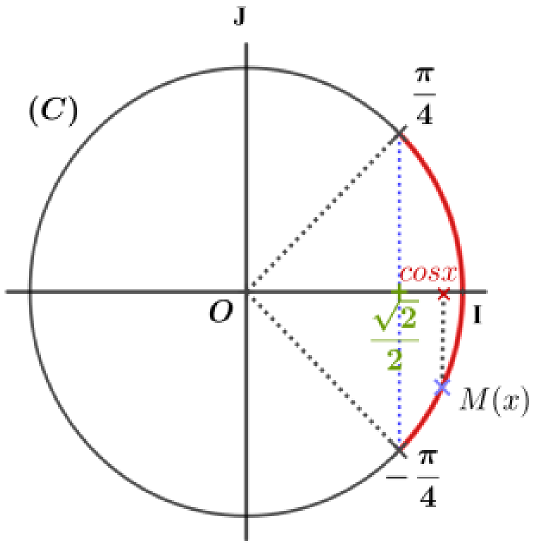
On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Et par suite les solutions de (E) dans $[-2\pi\,;2\pi]$ est : $-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}$

➢ **En représente les solutions sur le cercle trigonométrique :**

L'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses curviligne des points $M(x)$ representés sur l'arc rouge du cercle trigonométrique (C).

➢ **Donc l'ensemble des solutions sur $[-\pi;\pi]$ de (I) est : $S = \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$**

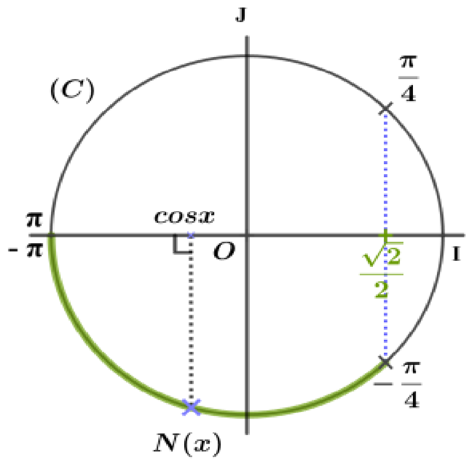


b) Résolvons dans $[-\pi;0]$ l'inéquation (I_2): $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses curviligne des points $N(x)$ representés sur l'arc vert du cercle (C)

D'ou l'ensemble de solutions sur $[-\pi;0]$ de (I_2) est

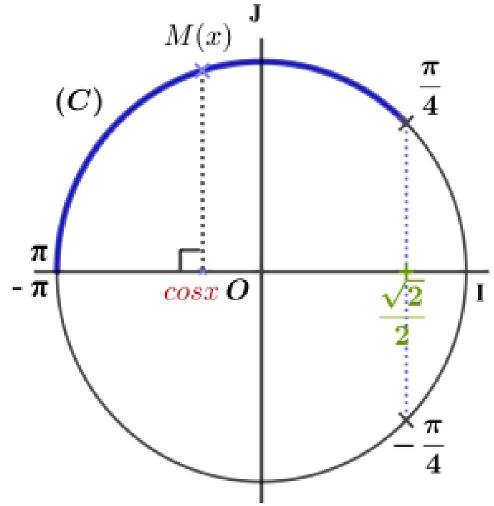
$$S = \left[-\pi;-\frac{\pi}{4}\right[$$



c) Résolvons dans l'intervalle $[0;\pi]$ l'inéquation (I_2): $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

L'ensemble des solutions de l'inéquation se lit donc sur le cercle trigonométrique c'est-à-dire :

$$S = \left]\frac{\pi}{4}\,;\pi\right]$$

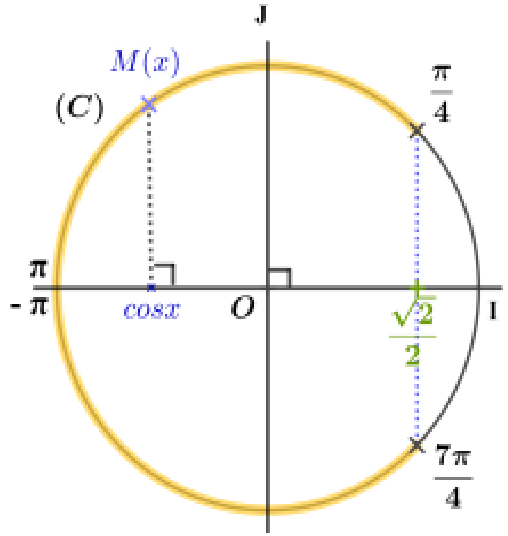


d) Résolvons dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'inéquation (I_2): $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

On a les solutions de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0;2\pi]$sont: $\frac{\pi}{4}$ *et* $\frac{7\pi}{4}$

Par lecture graphique, sur $[0;2\pi]$ l'ensemble des solutions de l'inéquation Est :

$$S = \left]\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right[$$



Exercice 11

1)a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sin x = \frac{1}{2}$

b) Résoudre dans l'intervalle $[0; 4\pi]$ l'équation (E) : $\sin x = \frac{1}{2}$

2)a) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation (I_1) : $\sin x \leq \frac{1}{2}$

b) Résolvons dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation (I_2) : $\sin x > \frac{1}{2}$

Solution de l'exercice 11

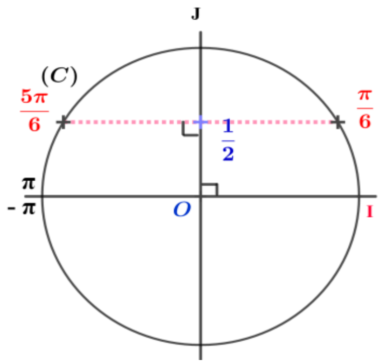
1)a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sin x = \frac{1}{2}$

On sait que : $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Equivaut à : $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Equivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$



D'où l'ensemble de solutions de (E) dans $\mathbb{R}$ est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ /k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) Résolvons dans $[0; 4\pi]$ l'équation (E) : $\sin x = \frac{1}{2}$

Les solutions de l'équation (E) dans $[0; 4\pi]$ donc :

$$0 \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 4\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou ; } 0 \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq 4\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$$

- $0 \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 4\pi$ équivaut à : $-\frac{1}{6} \leq 2k \leq 4 - \frac{1}{6}$

  équivaut à : $-\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{23}{12}$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$ car $k \in \mathbb{Z}$

Si $k = 0$, alors $\frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{6}$

Si $k = 1$, alors $\frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$

Donc : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{13\pi}{6}$ sont des solutions de (E) dans $[0; 4\pi]$.

- $0 \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq 4\pi$ équivaut à : $-\frac{5}{6} \leq 2k \leq 4 - \frac{5}{6}$

  équivaut à : $-\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{19}{12}$

Donc : $k = 0$ ou $k = 1$ car $k \in \mathbb{Z}$

Si $k = 0$, alors $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 0 = \frac{5\pi}{6}$

Si $k = 1$, alors $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$

Donc: $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{17\pi}{6}$ sont des solutions de (E) dans $[0; 4\pi]$.

D'où l'ensemble des solutions de (E) dans $[0; 4\pi]$ est :

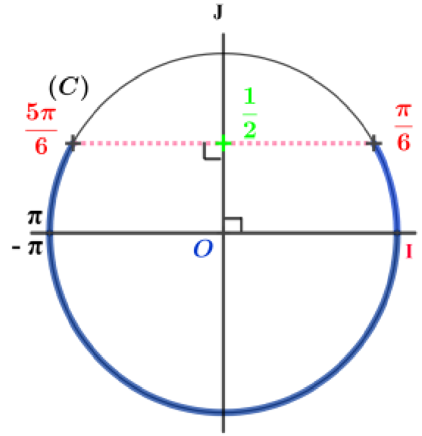
$$S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right\}$$

2a) Résolvons dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ l'inéquation (I_1) : $\sin x \leq \frac{1}{2}$

Les solutions de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ dans $[-\pi; \pi]$ sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$

À partir de la figure ci-contre, on déduit que l'ensemble des solutions dans $[-\pi; \pi]$ de (I_1) est :

$$S = \left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$$

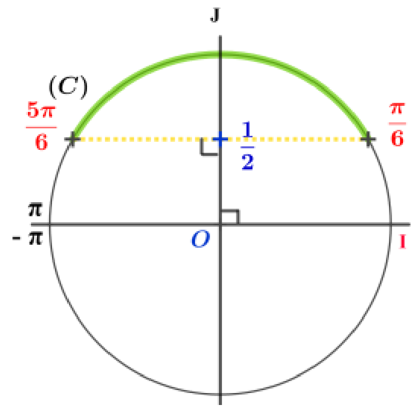


b) Résolvons dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ l'inéquation (I_2) : $\sin x > \frac{1}{2}$

Les solutions de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ dans $[-\pi; \pi]$ sont : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$

À partir de la figure ci-contre, on déduit que l'ensemble des solutions dans $[-\pi; \pi]$ de (I_2) est :

$$S_2 = \left]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right[$$



Exercice 12

1)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\tan x = \sqrt{3}$

2)Résoudre dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'inéquation (I_1): $\tan x \leq \sqrt{3}$

3)Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation (I_2): $\tan x > \sqrt{3}$

Solution de l'exercice 12

1)Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\tan x = \sqrt{3}$

On sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ et que

On en déduit que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2)Résolvons dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation (I_1): $\tan x \leq \sqrt{3}$

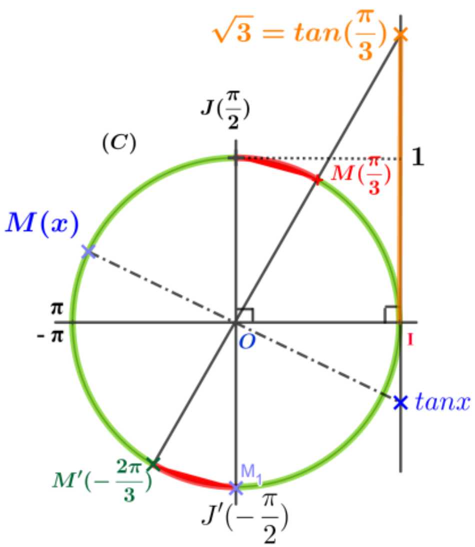
- Les solutions de l'équation $\tan x = \sqrt{3}$ dans $[-\pi;\pi]$ sont $-\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3}$

(de l'encadrement $-\pi \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \leq \pi$,on tire $k = -1$ et $k = 0$)

À partir de la figure en dessous, on déduit que l'ensemble des solutions dans $[-\pi;\pi]$ de (I_1) est :

$$S = \left[-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$$

(les deux arcs verts)



3)Résolvons dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation (I_2): $\tan x > \sqrt{3}$

L'ensemble des solutions de l'inéquation se lit donc sur le cercle : $S = \left]-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[$

(les deux arcs rouges)

Exercice 13

1) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 3cm$.
Calculer la surface de ce triangle.

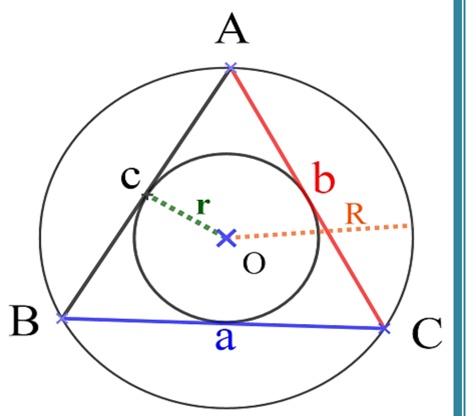
2) Soit ABC un triangle tel que $AB = 5cm$, $\widehat{A} = \frac{\pi}{4}$rad et $\widehat{B} = \frac{\pi}{6}$rad.

a) Calculer BC et AC.

b) Calcluer la surface de ce triangle.

c) Déterminer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

d) Déterminer le rayon du cercle inscrit dans triangle ABC



Solution de l'exercice 13

1) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 3cm$.

Donc $\widehat{C} = \frac{\pi}{3}$rad ET $AB = AC = BC = 3cm$

Donc la surface de ce triangle est : $S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$

2) Soit ABC un triangle tel que $AB = 5cm$, $\widehat{A} = \frac{\pi}{4}$rad et $\widehat{B} = \frac{\pi}{6}$rad.

a) Calculer BC et AC.

$$\textit{Utiliser la relation} : \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

b) Calcluer la surface de ce triangle.

$$\textit{Utiliser la relation} : \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

c) Déterminer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

$$\textit{Utiliser la relation} : \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$$

d) Déterminer le rayon du cercle inscrit dans triangle ABC.

$$\textit{Utiliser la relation} : S = \frac{1}{2}pr$$