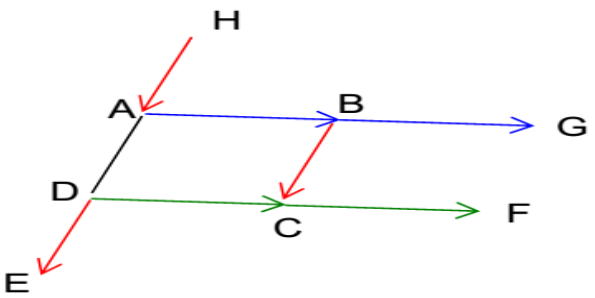
Correction de série 2 : Calcul vectoriel

Exercice 01

A partir du parallélogramme ABCD, construire les points E, F, G et H tels que : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$

Solution



Exercice 02

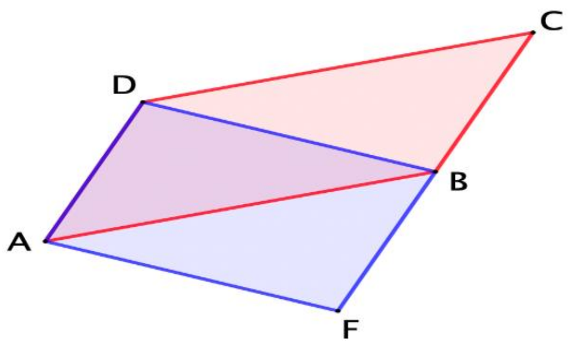
ABCD et *AFBD* sont deux parallélogrammes.

1) Réaliser une figure.

2) Démontrer que *B* est le milieu du segment $[CF]$.

Solution

1)



2) Dire que B est le milieu de $[CF]$ revient à dire que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF}$.

Démontrons-le.

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ car $ABCD$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA}$ car $AFBD$ est un parallélogramme.

Donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BF}$

Et donc en particulier : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF}$.

D'où B est le milieu de $[CF]$.

Exercice 03

1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Représenter les vecteurs suivants :
$2\vec{u}$, $-\vec{v}$ *et* $2\vec{u} - \vec{v}$.

2) Soit trois points A, B et C.

a) Représenter le vecteur $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$.

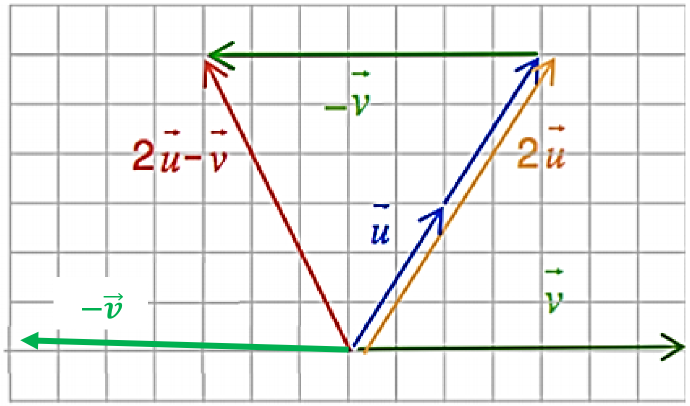
b) Représenter le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$.

Solution

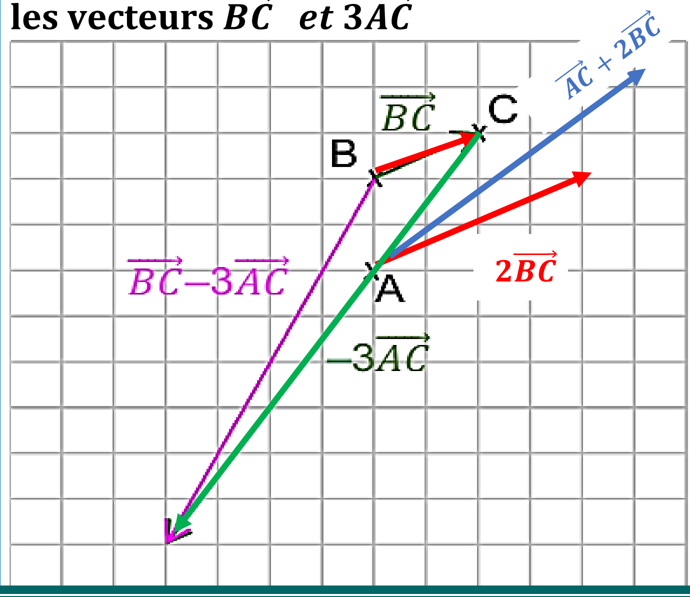
1) On commence par représenter le vecteur $2\vec{u}$:

• $-\vec{v}$ a la même direction et longueur que $\vec{v}$ mais il est de sens opposé

Pour représenter le vecteur $2\vec{u} - \vec{v} = 2\vec{u} + (-\vec{v})$, on place les vecteurs $2\vec{u}$ et $-\vec{v}$ bout à bout et on relit les extrémités du chemin construit.



b)Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC} + (-3\overrightarrow{AC})$, on place bout à bout les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ *et* $3\overrightarrow{AC}$



Correction de série 2 : Calcul vectoriel

Exercice 04

1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point O

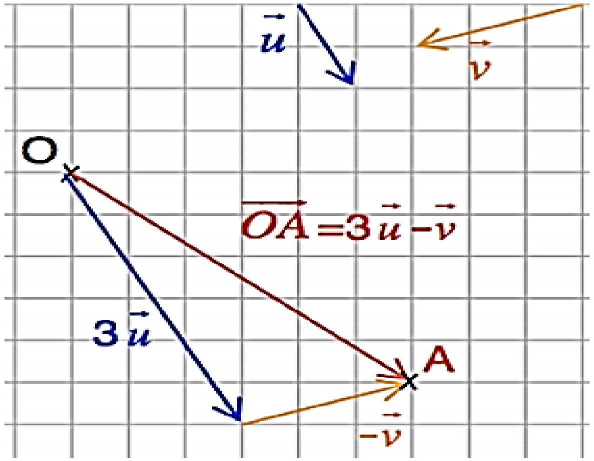
Construire A tel que $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$.

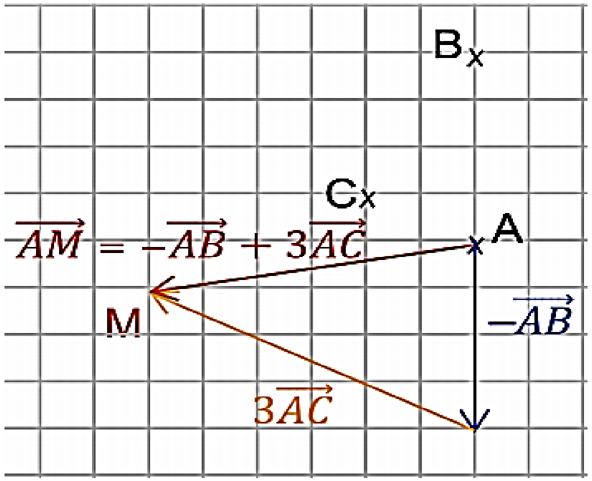
2) Soit trois points A, B, C du plan.

Construire le point M tel que

$\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

Solution





Exercice 05

On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tel que : $-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Solution

$-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$

$-4\vec{u} = -3\vec{v}$, donc $\vec{u} = \frac{-3}{-4}\vec{v}$

D'où $\vec{u} = \frac{3}{4}\vec{v}$

Exercice 06

ABCD est un parallélogramme du plan

1) Construire les points E et F tel que :

$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{DA}$

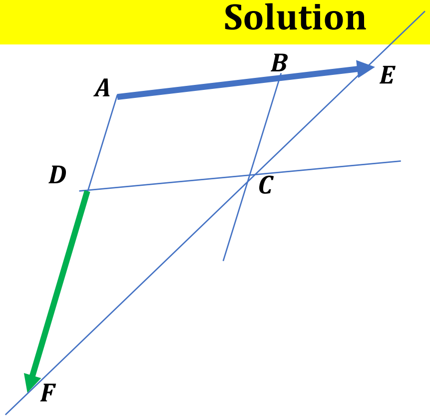
2) Montrer que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

et $\overrightarrow{FE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}$

3) En déduire que E ; F et C sont alignés

Solution

1)



2) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}$

$= \overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$= (-1 + \frac{3}{2})\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

Montrons que $\overrightarrow{FE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE}$

$= 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$

$= 3\overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}$

3)En déduire que E ; F et C sont alignés

<u>**1ère méthode :**</u>

On a $\overrightarrow{FE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}$

$= 3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$

$= 3\overrightarrow{CE}$

Donc les points E ; F et C sont alignés

2ème méthode :

On a $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{FE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}$

Donc $2\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}$ et $2\overrightarrow{FE}=3\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AD}$

Donc $6\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AD}$ et $2\overrightarrow{FE}=3\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AD}$

Donc $6\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{FE}$

Donc $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{6}\overrightarrow{FE}$

Donc les points E ; F et C sont alignés

Exercice 07

ABC est un triangle du plan (P)

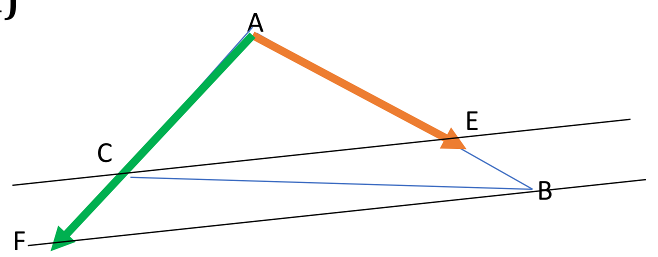
1) Construire les points E et F tel que :
$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

2) Montrer que $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
et $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

3) En déduire que les droites (EC) et (BF) sont parallèle

Solution

1)



2) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$

$$=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

$$=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

Montrons que $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$

$$=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$$

3) **1ère méthode :**

On a $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$$=\frac{3}{4}\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$$

Donc les droites (EC) et (BF) sont parallèle

2ème méthode :

On a : $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc $\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc $\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Donc $\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{EC}$

Donc les droites (EC) et (BF) sont parallèle

Exercice 08

Soient $ABCD$ un parallélogramme, et M ; E et F des points du plan tels que :
$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

1) Construire les points M ; E et F

2) Montrer que $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ et
$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$

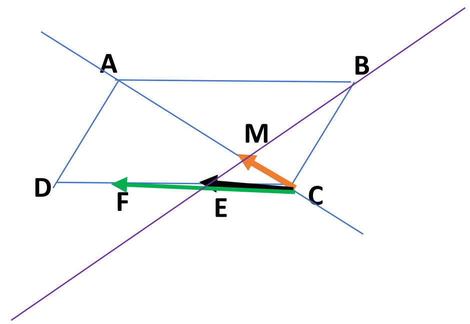
3) En déduire que les points M ; E et B sont alignés

4) Montrer que E est le milieu de segment $[CF]$

Solution

Soient $ABCD$ un parallélogramme, et M ; E et F des points du plan tels que :
$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

1) Construire les points M ; E et F



Correction de série 2 : Calcul vectoriel

2) Montrer que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$

$= -\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$

$= -\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD})$

$= -\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$

$= (-1 + \frac{1}{4})\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$

$= \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

Montrons que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$

$= -\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$

3) En déduire que les points M ; E et B sont alignés

On a $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

Donc $4\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD} - 3\overrightarrow{CB}$

Donc $\frac{4}{3}\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$

Donc $\frac{4}{3}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BE}$

Donc les points M ; E et B sont alignés

4) Montrer que E est le milieu de segment $[CF]$

On a : $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

Donc $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{FC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

Donc $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

Donc $\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

Donc $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{EF}$

et on a $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

Donc $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3} \times 3\overrightarrow{EF}$

Donc $\overrightarrow{CF} = 2\,\overrightarrow{EF}$

Donc E est le milieu de segment $[CF]$

Exercice 09

ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$

1) a) Construire les points M et N tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

b) Montrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles

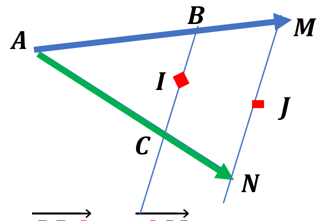
2) Soit J le milieu de segment $[MN]$

a) Montrer que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AI}$

b) En déduire que A ; I et J sont alignés

Solution

1) a)



b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

Donc $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

Donc (BC) et (MN) sont parallèles

2)a) Montrer que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AI}$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

On a I le milieu de segment $[BC]$

Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$

Donc $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2} \times 2\overrightarrow{AI}$

$$= 3\overrightarrow{AI}$$

b) En déduire que A ; I et J sont alignés

On a $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AI}$

Donc $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JM} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JN} = 3\overrightarrow{AI}$; $(*)$

Et on a J le milieu de segment $[MN]$

Donc $\overrightarrow{JM} + \overrightarrow{JN} = \vec{0}$

Donc $(*)$ devient $2\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AI}$

Donc $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ *et* $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires

Donc les points A ; I et J sont alignés

Exercice 10

ABCD est un parallélogramme de centre O

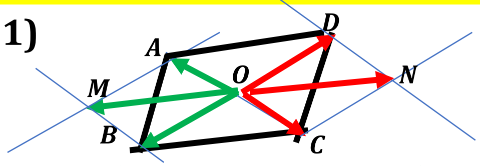
1) Construire les points M et N tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

2) Montrer que O est le milieu de $[MN]$

3) Montrer que les droites (AD) et (MN) sont parallèles

Solution

1)



2) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

Donc: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$

Et on a O est le milieu des segment $[AC]$

Donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Et on a O est le milieu des segment $[BD]$

Donc $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$

D'où $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$

Donc O est le milieu de segment $[MN]$

3) $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM}$

$$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

$$= 2\overrightarrow{AD}$$

Donc (AD) et (MN) sont parallèles