Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes :

$f(x) = x^2 + 2$; $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$; $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

Rappel 01 :

L'ensemble de définition d'une fonction f noté par D_f est l'ensemble des nombres réels x tel que $f(x) \in \mathbb{R}$

Soient P et Q deux polynômes

Fonction f	Domaine de définition
$f(x) = P(x)$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R}/Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R}/\mathrm{P}(x) \geq 0\}$

Rappel 02 :

- La fonction f est paire si pour tout $\mathrm{x} \in \mathrm{D_f}$ on a : $-\mathrm{x} \in \mathrm{D_f}$ et $\mathrm{f}(-\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$
- La fct f est impaire si pour tout $\mathrm{x} \in \mathrm{D_f}$ on a : $-\mathrm{x} \in \mathrm{D_f}$ et $\mathrm{f}(-\mathrm{x}) = -\mathrm{f}(\mathrm{x})$

Solution

1) $f(x) = x^2 + 2$

- **L'ensemble de définition de f**

La fonction f est un polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

- **La parité de la fonction f**

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $-x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$$

Donc la fonction f est paire

2) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

- **L'ensemble de définition de f**

$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x^2 + 1 \neq 0\}$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x^2 \geq 0$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x^2 + 1 \geq 1$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x^2 + 1 \neq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

- **La parité de la fonction f**

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $-x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{2x^2}{x^2+1} = f(x)$$

Donc la fonction f est paire

3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

- **L'ensemble de définition de f**

$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 4 \neq 0\}$

$x^2 - 4 \neq 0$ $donc$ $x^2 \neq 4$

$donc$ $\mathrm{x} \neq \sqrt{4}$ et $\mathrm{x} \neq -\sqrt{4}$

$donc$ $\mathrm{x} \neq 2$ et $\mathrm{x} \neq -2$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$=]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$

- **La parité de la fonction f**

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$donc$ $\mathrm{x} \neq 2$ et $\mathrm{x} \neq -2$

$donc$ $-\mathrm{x} \neq -2$ et $-\mathrm{x} \neq 2$

Donc $-x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$$* \; f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-4} = -\frac{x}{x^2-4} = -f(x)$$

Donc la fonction f est impaire

Exercice 2

f une fonction dont le tableau de variations

x	-4		-3		1		5
$f(x)$	2	↘	-5	↗	6	↘	-2

1) Déterminer D_f
2) Déterminer les extremums de f sur D_f
3) Déterminer $f([-3; 1])$ et $f([1; 5])$
4) Déterminer $f([-4; -3])$ et $f([-4; 5])$

Rappel 03 : Extremums d'une fonction

- $f(a)$ est une valeur minimale de f sur D_f si pour tout $x \in D_f$ on a: $f(a) \leq f(x)$
- $f(a)$ est une valeur maximale de f sur D_f si pour tout $x \in D_f$ on a: $f(x) \leq f(a)$

L'image d'un intervalle I : $f(\mathrm{I}) = \{f(x)/x \in \mathrm{I}\}$

L'image d'un intervalle : $f([\mathrm{a}; \mathrm{b}]) = [\mathrm{m}; \mathrm{M}]$

Avec m est la valeur minimale de f sur $[\mathrm{a}; \mathrm{b}]$

Et M est la valeur minimale de f sur $[\mathrm{a}; \mathrm{b}]$

Solution

1) $D_f = [-4; 5]$

2) Déterminer les extremums de f sur D_f

La valeur minimale de f sur l'intervalle $[-4; 5]$ est -5

La valeur minimale de f sur l'intervalle $[-4; 5]$ est 6

3) $f([-3; 1]) = [\mathrm{f}(-3); \mathrm{f}(1)] = [-5; 6]$

$f([1; 5]) = [\mathrm{f}(5); \mathrm{f}(1)] = [-2; 6]$

4) $f([-4; -3]) = [-5; 2]$

$f([-4; 5]) = [-5; 6]$

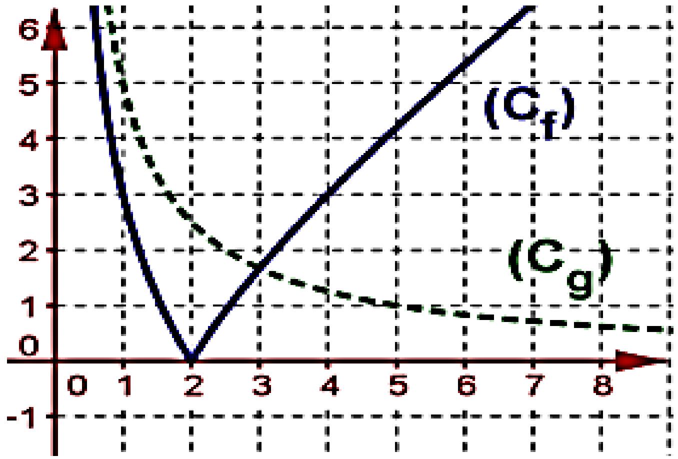
Rappel 4 : La courbe d'une fonction f noté par (C_f) est l'ensemble des points $M(x\,;f(x))$ tel que $x \in D_f$

Rappel 5: Sens de variations d'une fonction

- La fonction f est croissante sur I si :
  $\forall(x;y) \in I^2 : x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$
- La fonction f est décroissante sur I si :
  $\forall(x;y)(x;y) \in I^2 : x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$
- La fonction f est constante sur I si :
  $\forall(x;y) \in I^2 : x \neq y \Rightarrow f(x) = f(y).$
- La fonction est monotone sur I si la fonction est croissante ou décroissante sur I.

Exercice 3

f et g deux fonctions définit sur $]0;+\infty[$ par



1) Déterminer $f(1)$; $f(2)$; $f(4)$; $g(5)$; $g(1)$

$f(1) = 3$ *et* $f(2) = 0$ *et* $f(4) = 3$

$g(5) = 1$ *et* $g(1) = 5$

2) Dresser la table de variations de f

On voit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et décroissante sur $]0;2]$

D'où le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

Dresser la table de variations de g

On voit que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

x	0		$+\infty$
$g(x)$		↘	

3) Déterminer graphiquement : $f([4;5])$ $f([1;2])$; $f([2;+\infty[)$; $g([1;5])$;$g([5;+\infty[)$

L'image d'un intervalle I : $f(\mathrm{I}) = \{f(x)/x \in \mathrm{I}\}$

$f([4;5]) = [f(4);f(5)] = [3;4]$

$f([1;2]) = [f(2);f(1)] = [0;3]$

$f([4;+\infty[) = [f(4);+\infty[= [3;+\infty[$

$g([1;5]) = [g(5);g(1)] = [1;5]$

$g([5;+\infty[) =]0;g(5)] =]0;1]$

Car quand x s'approche de $+\infty$ on voit que g(x) s'approche de 0

4) Résoudre graphiquement l'équation

$f(x) = 0$; $f(x) = 3$; et $g(x) = f(x)$

Rappel 6 :

- Graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) avec la droite d'équation y$=$ k
- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersections des courbes (C_f) et $C_g)$

Résolution d'équation $f(x) = 0$;

On a la courbe (C_f) coupe la droite d'équations y= 0 en un point unique d'abscisse 2 donc $S = \{2\}$

Résolution d'équation $f(x) = 3$;

On a la courbe (C_f) coupe la droite d'équations y= 3 en deux points d'abscisses 1 et 4 donc $S = \{1,4\}$

Résolution d'équation $g(x) = f(x)$;

On a les courbes (C_f) et $C_g)$ sont sécante en un point unique d'abscisse 3 donc $S = \{3\}$

5) Résoudre graphiquement les inéquations

$f(x) < 3$; $f(x) < g(x)$ et $f(x) \geq g(x)$

Rappel 07 :

Positions relatives de deux courbes,

- Si $f(x) \geq g(x)$ sur un intervalle I alors la courbe (C_f) est située en dessus de (C_g)
- Si $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle I alors (C_f) est située en dessous de (C_g) sur I

Résolution d'inéquation $f(x) < 3$;

On a la courbe (C_f) est située en dessous de la droite d'équation y= 3 sur l'intervalle $]1;4[$ donc $S =]1;4[$

Résolution d'inéquation $f(x) < g(x)$;

On a la courbe (C_f) est située en dessous de la courbe (C_g) sur l'intervalle $]0;3[$

Donc $S =]0;3[$

Résolution d'inéquation $f(x) \geq g(x)$;

On a la courbe (C_f) est située en dessus de la courbe (C_g) sur l'intervalle $[3\,;+\infty[$

Donc $S = [3;+\infty[$

Rappel 08 : $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$; $D_f = \mathbb{R}$

a, b et c des nombres réels tels que $(a \neq 0)$.

La courbe représentative de la fonction définie par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ dans un repère orthonormé est une parabole de sommet $\Omega(\frac{-b}{2a}; f(\frac{-b}{2a}))$ et la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ son axe de symétrie

Les variations de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

♠ Si $a > 0$ alors la fonction est croissante sur $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$

♠ Si $a < 0$ alors la fonction est croissante sur $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$

Le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est :

Si $a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f(-\frac{b}{2a})$	↗

Si $a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f(-\frac{b}{2a})$	↘

Exercice 4

f et g deux fonctions définit par

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$

1) a) Dresser la table des variations de f

b) Déterminer la nature de (C_f)

c) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

d) Tracer la courbe (C_f) de la fonctions f

2) Les mêmes questions pour la fonction g

3) Montrer que f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$

4)a) Déterminer D_{gof} puis calculer $gof(x)$

b) Déterminer D_{fog} puis calculer $fog(x)$

Solution

$f(x) = x^2 - 4x + 3$;

1) a) On a : $D_f = \mathbb{R}$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = 2 \; et \; f(2) = -1$$

Le tableau des variations de f : $a = 1 > 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

b) La nature de (C_f) : La courbe (C_f) est une parabole de sommet $\Omega(2; -1)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 2$

Rappel 09 :

- Les points d'intersection de (Cf) avec l'axe des abscisses (Ox) sont les points dont les abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$
- L'intersection de (Cf) avec (Oy) l'axe des ordonnées est le point $A(0 ; f(0))$

c) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

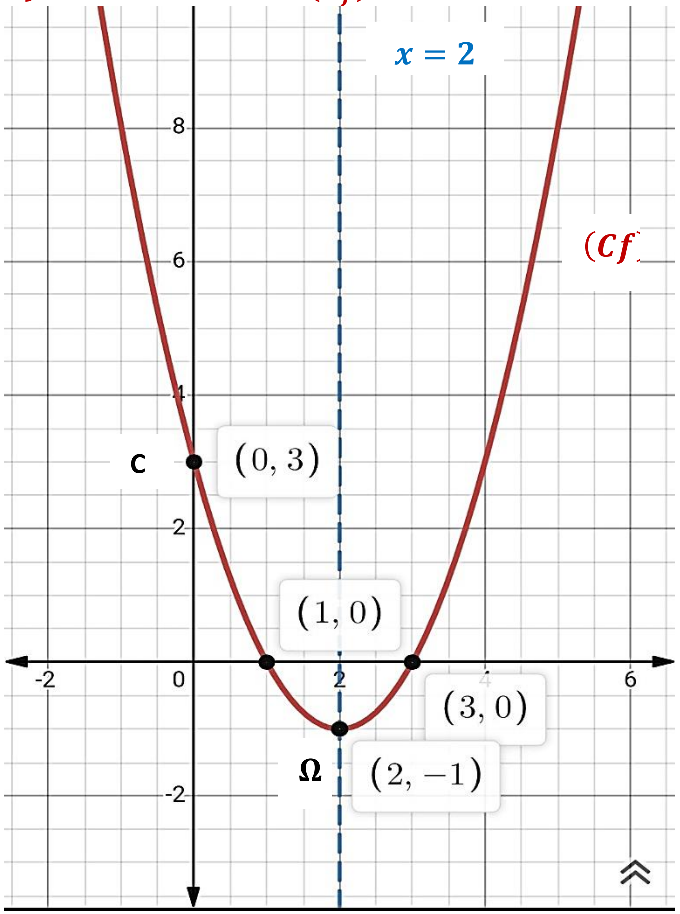
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$

$$x = \frac{4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 3 \quad ou \quad x = \frac{4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 1$$

Les points d'intersection de (Cf) avec l'axe (Ox) sont les deux points $A(1 ; 0)$ et $B(3 ; 0)$

L'intersection de (Cf) avec (Oy) est le point $C(0 ; f(0))$ $donc$ $C(0 ; 3)$

d) Tracer la courbe (C_f) de la fonctions f



Rappel 10 :

Etude de fonction $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$; $c \in IR^*$

$D_f = \left]-\infty; \frac{-d}{c}\right[\cup \left]\frac{-d}{c}; +\infty\right[$

Le sens des variations de f sur D_f

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Si $\Delta > 0$ alors f est str croissante sur D_f

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)	↗	‖	↗

Si $\Delta < 0$ alors f est str décroissante sur D_f

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘

La courbe (C_f) de f est appelée hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites (D) et (D') d'équations : $x = \frac{-d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

2) Les mêmes questions pour la fonction g

$$g(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

a) Dresser la table des variations de f sur D_g

a) On a :

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x + 1 \neq 0\}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1\}$

$D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$D_g =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1) - (2 \times 1) = -1$

Donc $\Delta < 0$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur les intervalles

$]-\infty; -1[$ *et* $]-1; +\infty[$

D'où le tableau de variations de g

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	↘	‖	↘

b) la nature de la courbe (C_g)

La courbe (C_g) de g est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ c-t-dire $\Omega(-1; 1)$ et d'asymptotes les droites (D) et (D') d'équations : $x = \frac{-d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$ c-t-dire $x = -1$ et $y = 1$

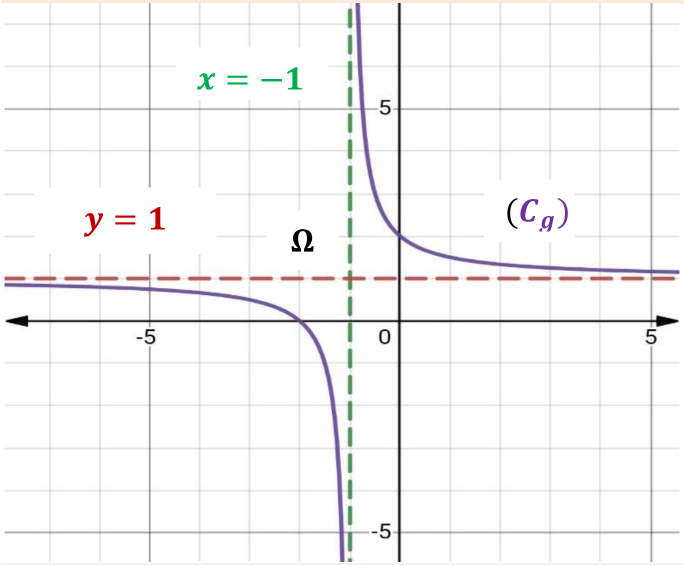
c) Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$\text{g}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} = 0$$
$$\Leftrightarrow x + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -2$$

Le point d'intersection de (Cg) avec l'axe (Ox) est le points $A(-2\,;0)$

L'intersection de (Cg) avec (Oy) est le point B$(0\,;\text{g}(0))$ *donc* $B(0\,;2)$

d) Tracer la courbe (C_g) de la fonctions g



Rappel 10 :

Fonction minorée-majorée-bornée

- **On dit que f est majorée par le réel M sur l'intervalle I ssi $(\forall x \in I)\,; f(x) < M$.**

Dans la plupart des cas on simplifie la différence $f(x) - M$ puis on montre que $f(x) - M < 0$ sur I

- **On dit que f est minorée par le réel m sur l'intervalle I si : $(\forall x \in I)\,; f(x) > m$.**

Dans la plupart des cas on simplifie la différence $f(x) - m$ puis on montre que $f(x) - m > 0$ sur I

- **On dit que f est bornée si elle est majorée et minorée sur I.**

3) Montrer que f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - (-1) = x^2 - 4x + 3 + 1$$
$$= x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

Donc $f(x) - (-1) \geq 0$ ***, donc*** $f(x) \geq -1$

Rappel 11 :

La composée des fonctions

f et g notée gof est la fonction définie sur I par $\forall x \in I;\ gof(x) = g(f(x))$

$$g\circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) \in D_g \mapsto g(f(x)) = g\circ f(x)$$

- $x \in D_{gof} \Leftrightarrow x \in D_f\ et\ f(x) \in D_g$
- $x \in D_{fog} \Leftrightarrow x \in D_g\ et\ g(x) \in D_f$

4)a) Déterminer D_{gof} puis calculer $gof(x)$

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

On a : $D_f = \mathbb{R}$ *et* $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$x \in D_{gof} \Leftrightarrow x \in D_f\ \ et\ \ f(x) \in D_g$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\ \ et\ \ (x^2 - 4x + 3) \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\ \ et\ x^2 - 4x + 3 \neq -1$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\ \ et\ x^2 - 4x + 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\ \ et\ (x-2)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\ \ et\ x - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\ \ et\ x \neq 2$

Donc : $D_{gof} = \mathbb{R} - \{2\}$

Calculons : $gof(x)$ sur $D_{gof} = \mathbb{R} - \{2\}$

On a : $gof(x) = g(f(x))$

$$= g(x^2 - 4x + 3)$$
$$= \frac{(x^2 - 4x + 3) + 2}{(x^2 - 4x + 3) + 1}$$
$$= \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 4}$$

b) Déterminer D_{fog} puis calculer $fog(x)$

$x \in D_{fog} \Leftrightarrow x \in D_g\ et\ \ g(x) \in D_f$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1\}\ \ et\ \ \dfrac{x+2}{x+1} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x \neq -1$

Donc : $D_{fog} = \mathbb{R} - \{-1\}$

Calculons : $fog(x)$ sur $D_{fog} = \mathbb{R} - \{-1\}$

On a : $fog(x) = f(g(x))$

$$= f\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$
$$= \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 - 4\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + 3$$

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions telles que :

$$f(x) = \sqrt{x+4} \quad et \quad g(x) = 2x^3$$

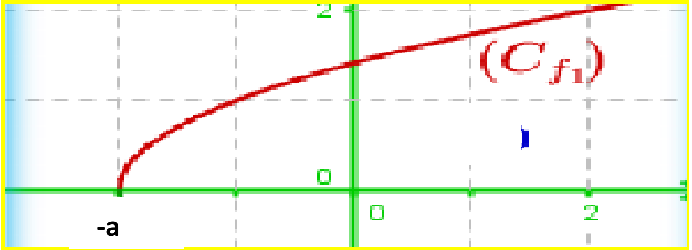
1) a) Déterminer D_f
   b) Dresser le tableau des variations de f
   c) Tracer la courbe (C_f) de la fonctions f
2) Les mêmes questions pour la fonction g
3) Déterminer D_{gof} puis calculer $gof(x)$

Rappel 12 :

- **Etude de fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+a}\ \ /a \in IR.$**

La fonction f est strictement croissante sur $D_f = [-a; +\infty[$

La courbe (C_f) de f



Solution

$$f(x) = \sqrt{x+4}$$

1)a) Déterminer D_f

$x \in D_f \Leftrightarrow x + 4 \geq 0 \ \Leftrightarrow x \geq -4$

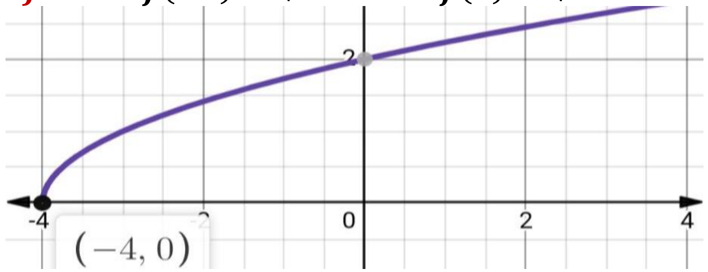
Donc : $D_f = [-4; +\infty[$

b) Dresser le tableau des variations de f

f est strictement croissante sur $[-4; +\infty[$

x	-4	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	

c) On a : $f(-4) = \sqrt{0} = 0$ *et* $f(0) = \sqrt{4} = 0$



2)Les mêmes questions pour la : $g(x) = 2x^3$

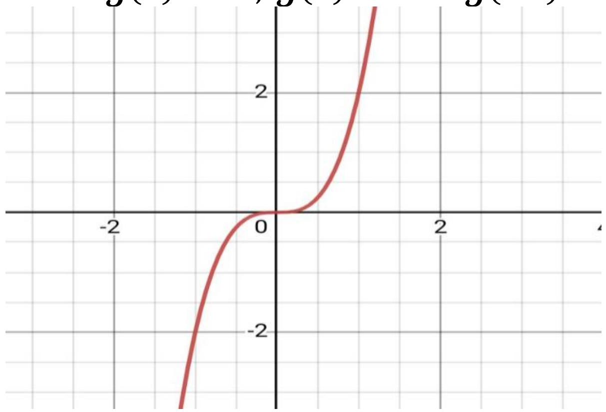
a) Déterminer D_g , on a : $D_g = \mathbb{R}$

b) Le sens des variations de g

g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $a = 2 > 0$

c)Tracer la courbe (C_g) de la fonctions f

On a : $g(0) = 0$; $g(1) = 2$ *et* $g(-1) = -2$



3)a) Déterminer D_{gof} puis calculer $gof(x)$

$$f(x)=\sqrt{x+4} \quad \text{et} \quad g(x)=2x^3$$

On a : $D_f=[-4;+\infty[$ *et* $D_g=\mathbb{R}$

$x \in D_{gof} \Leftrightarrow x \in D_f$ *et* $f(x) \in D_g$

$\Leftrightarrow x \in [-4;+\infty[$ *et* $\sqrt{x+4} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x \in [-4;+\infty[$ *et* $x \in [-4;+\infty[$

$\Leftrightarrow x \in [-4;+\infty[$

Donc : $D_{gof}=[-4;+\infty[$

Calculons : $gof(x)$ sur $D_{gof}=[-4;+\infty[$

On a : $gof(x)=g(f(x))$

$=g(\sqrt{x+4})$

$=2(\sqrt{x+4})^3$

Exercice 6

f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

1) Montrer que f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$
2) Montrer que f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$
3) Etudier la parité du fonction f
4) Montrer que pour tout x ;y dans $\mathbb{R}$ $f(x)-f(y)=\frac{2(1-xy)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$,puis en déduire T_f
5) Etudier le sens des variations de f sur $[0;1]$ puis sur $[1;+\infty[$
6) En déduire le sens des variations de f sur $[-1;0]$ puis sur $]-\infty;-1]$
7) Dresser la table de variations de f sur $\mathbb{R}$

Solution

f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

1) Montrer que f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x)-1=\frac{2x}{x^2+1}-1$$
$$=\frac{2x-(x^2+1)}{x^2+1}$$
$$=\frac{2x-x^2-1}{x^2+1}$$
$$=\frac{-(x^2-2x+1)}{x^2+1}$$
$$=\frac{-(x-1)^2}{x^2+1}\leq 0$$

Donc : $f(x)-1\leq 0$

Donc : $f(x)\leq 1$

2)Montrer que f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x)-(-1)=\frac{2x}{x^2+1}+1$$
$$=\frac{2x+(x^2+1)}{x^2+1}$$
$$=\frac{2x+x^2+1}{x^2+1}$$
$$=\frac{(x^2+2x+1)}{x^2+1}$$
$$=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0$$

Donc : $f(x)+1\geq 0$

Donc : $f(x)\geq -1$

3)Etudier la parité du fonction f

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $-x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f(-x)=\frac{2(-x)}{(-x)^2+1} \quad =\frac{-2}{x^2+1} \quad =f(x)$$

Donc la fonction f est impaire

Rappel 12 :

Taux de variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle I, on calcule T le taux de variations $T=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ *avec* $x\neq y$.

- Si $T>0$ sur I alors f est strictement croissante sur I
- Si $T<0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I

la monotonie et la parité d'une fonctions

f une fonction tel que $D_f=I\cup J$ avec I et J sont des intervalles symétrique par rapport à zéro

- Si f est paire sur D_f alors le sens des variations de f sont opposées sur I et J
- Si f est impaire sur D_f alors le sens des variations de f sont les même sur I et J

4)Montrer que pour tout x ;y dans $\mathbb{R}$ $f(x)-f(y)=\frac{2(1-xy)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$,puis en déduire T_f

$$f(x)-f(y)=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2y}{y^2+1}$$
$$=\frac{2x(y^2+1)-2y(x^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)}$$
$$=\frac{2xy^2+2x-2yx^2-2y}{(x^2+1)(y^2+1)}$$
$$=\frac{2xy^2-2yx^2+2x-2y}{(x^2+1)(y^2+1)}$$
$$=\frac{-2xy(x-y)+2(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$$
$$=\frac{2(1-xy)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

$Donc : f(x) - f(y) = \dfrac{2(1-xy)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$

$Donc : T_f = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{\frac{2(1-xy)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}}{x-y}$

$Donc : T_f = \dfrac{2(1-xy)}{(x^2+1)(y^2+1)}$

5)Etudier le sens des variations de f sur $[0;1]$ puis sur $[1;+\infty[$

Soient x et y dans l'intervalle $[0;1]$

On a : $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$

Donc $0 \leq xy \leq 1$

Donc $-1 \leq -xy \leq 0$

Donc $0 \leq 1 - xy \leq 1$

Donc $0 \leq 2(1-xy) \leq 2$

Et on a : $(x^2+1)(y^2+1) > 0$

$Donc : T_f = \dfrac{2(1-xy)}{(x^2+1)(y^2+1)} \geq 0$

Donc la fonction f est décroissante sur $[0;1]$

Soient x et y dans l'intervalle $[1;+\infty[$

On a : $x \geq 1$ et $y \geq 1$ $donc$ $xy \geq 1$

Donc $-xy \leq -1$

Donc $1 - xy \leq 0$ Donc $2(1-xy) \leq 0$

Et on a : $(x^2+1)(y^2+1) > 0$

$Donc : T_f = \dfrac{2(1-xy)}{(x^2+1)(y^2+1)} \leq 0$

Donc la fonction f est croissante sur$[1;+\infty[$

6)En déduire le sens des variations de f sur $[-1;0]$ puis sur $]-\infty;-1]$

On a la fonction f est décroissante sur $[0;1]$

De plus f est impaire donc f conserve la monotonie sur $[-1;0]$

D'où la fonction f est décroissante sur $[-1;0]$

On a f est croissante sur $[1;+\infty[$

De plus f est impaire donc f conserve la monotonie sur $]-\infty;-1]$

D'où f est croissante sur $]-\infty;-1]$

7)Dresser la table de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	↗	-1	↘	1	↗

Exercice 6

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 \ et \ g(x) = \frac{x+6}{2x-2}$$

1) Dresser le tableau de variations de f et g
2) Vérifier que $(C_f)\ et (C_g)$ sont sécantes en $A(2\,;4)$ puis tracer $(C_f)\ et (C_g)$
3) Déterminer graphiquement $g([2,+\infty[)$.
4) Etudier la monotonie de la fonction fog sur $[2;+\infty[$

Solution

Soient f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 \ et \ g(x) = \frac{x+6}{2x-2}$$

5) Dresser le tableau de variations de f et g

$$D_f = \mathbb{R}$$

f est croissante sur $\mathbb{R}$ car $a = \frac{1}{2} > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

$x \in D_g \Leftrightarrow 2x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 1$

$D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$D_g =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (1 \times -2) - (6 \times 2) = -14$$

Donc g est strictement décroissante sur D_g

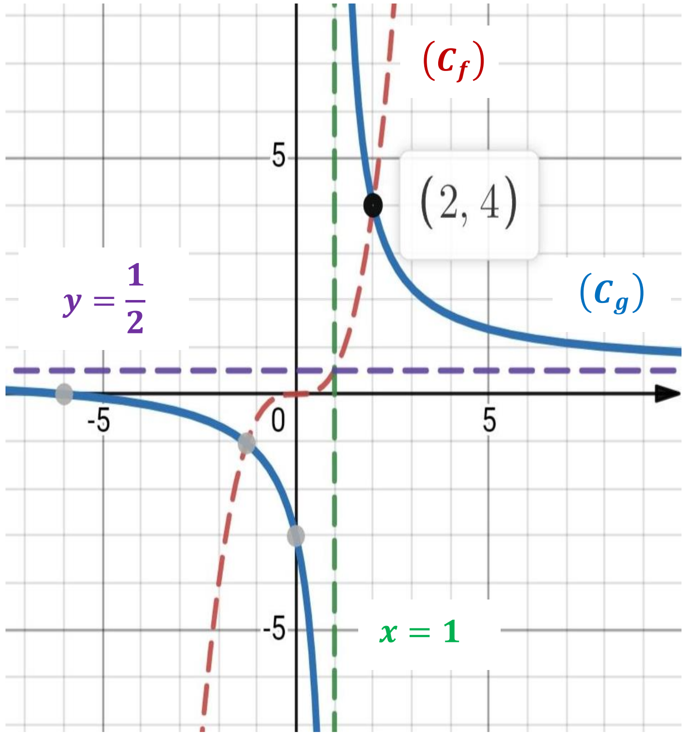
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↘	‖	↘

2)Représenter les courbes $(C_f)\ et (C_g)$

$On\ a :\ f(2) = 4$ et $g(2) = 4$

Donc $(C_f)\ et (C_g)$ sont sécantes en $A(2\,;4)$

De plus La courbe (C_g) est une hyperbole de centre $\Omega\left(1;\frac{1}{2}\right)$ et d'asymptotes les droites (D) et (D') d'équations : $x = 1$ et $y = \frac{1}{2}$



3)Déterminer graphiquement $g([2,+\infty[)$.

$$g([2,+\infty[) = \left]\frac{1}{2}, g(2)\right] = \left]\frac{1}{2}, 4\right]$$

Rappel 13 : Sens des variations de gof

- Si f et g ont le même sens de variations sur I et $f(I)$ respectivement alors gof est croissante sur I
- Si f et g ont du sens de variations contraire sur I et $f(I)$ respectivement alors gof est décroissante sur I..

Pratiquement on suit les étapes suivantes :

- On détermine la monotonie de f sur I
- On Détermine f(I)
- On détermine la monotonie de g sur f(I)
- On déduit la monotonie de gof sur I

4)Etudier la monotonie de la fonction fog sur $[2;+\infty[$

- la fonction g est décroissante sur $[2;+\infty[$
- Et on a : $g([2,+\infty[) = \left]\frac{1}{2},4\right]$
- Et la fonction f est croissante sur $\left]\frac{1}{2},4\right]$
- Donc la fonction fog est décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions définies par :

$f(x) = -x^2+2x+1$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$

1) Vérifier que (C_f) et(C_g) sont sécantes en un point $A(2;1)$.
2) Représenter les courbes (C_f) et(C_g)
3) Déterminer graphiquement $f([0;1])$, et $f([1;2])$
4) Soit la fct h définie par : $h(x) = \sqrt{2x-x^2}$

a- Déterminer l'ensemble de définition de h

b- Vérifier que : $h(x) = gof(x)$; $(\forall x \epsilon D_h)$.

c- Étudier la monotonie de la fonction h sur les intervalles $[0;1]$ et $[1;2]$.

Solution

Soient f et g deux fonctions définies par :

$f(x) = -x^2+2x+1$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$

1) Vérifier que (C_f) et(C_g) sont sécantes en un point $A(2;1)$.

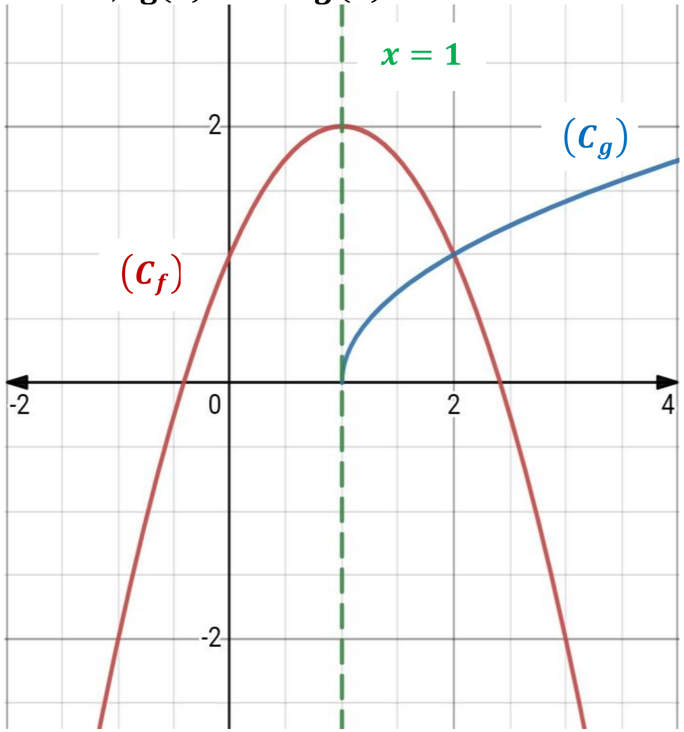
On a : $f(2) = 1$ et $g(2) = 1$

Donc (C_f) et(C_g) sont sécantes en $A(2\,;1)$

2) Représenter les courbes (C_f) et(C_g)

la courbe (C_f) est une parabole de sommet $\Omega(\frac{-b}{2a};f(\frac{-b}{2a}))$ donc $\Omega(1;2)$ et la droite d'équation $x=1$ son axe de symétrie

Et ona ; $g(1) = 0$ et $g(2) = 1$



3)Déterminer graphiquement $f([0;1])$, et $f([1;2])$

$f([0;1]) = [f(0);f(1)] = [1;2]$

$f([1;2]) = [f(2);f(1)] = [1;2]$

4)Soit la fct h définie par : $h(x) = \sqrt{2x-x^2}$

a- Déterminer l'ensemble de définition de h

$x \in D_h \Leftrightarrow 2x-x^2 \geq 0$

Etudions le signe de $2x-x^2$

$2x-x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $2-x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$2x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_h = [1;2]$

b- Vérifier que : $h(x) = gof(x)$; $(\forall x \in D_h)$.

$f(x) = -x^2+2x+1$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$

$gof(x) = g(f(x))$

$= g(-x^2+2x+1)$

$= \sqrt{-x^2+2x+1-1}$

$= \sqrt{2x-x^2}$

$= h(x)$

c- Étudier la monotonie de la fonction h sur les intervalles $[0;1]$ et $[1;2]$.

$\frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2\times(-1)} = 1$ et $f(1) = 2$

Le tableau des variations de f : $a = -1 < 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

Et on a la fonction g est croissante sur $D_g = [1;+\infty[$

La monotonie de $h = gof$ sur $[0;1]$

- la fonction f est croissante sur $[0;1]$
- Et on a : $f([0;1]) = [1;2]$
- Et la fonction g est croissante sur$[1;2]$
- Donc fog est croissante sur $[0;1]$

La monotonie de $h = gof$ sur $[1; 2]$

- la fonction f est décroissante sur $[1; 2]$
- Et on a : $f([1; 2]) = [1; 2]$
- Et la fonction g est croissante sur $[1 ; 2]$
- Donc fog est décroissante sur $[1 ; 2]$

Exercice 9

Soient f *et* g deux fonction tel que :

$f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$

1) Dresser le tableau de variations de f puis de la fonction g
2) Représenter les courbes (C_f) *et* (C_g)
3) Déterminer $g\left(\left[-2; \frac{-7}{4}\right]\right)$ et $g\left(\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right[\right)$
4) Déterminer D_{fog} puis déterminer $fog(x)$
5) Montrer que fog est minorée par $\frac{-1}{4}$
6) Etudier la monotonie de la fonction fog sur $\left[-2; \frac{-7}{4}\right]$ et $\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right[$

Solution

f *et* g tel que : $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$

1)Dresser le tableau de variations de f puis de la fonction g

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \ et \ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Le tableau des variations de f : $a = 1 > 0$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗

Et on a la fonction g est croissante sur

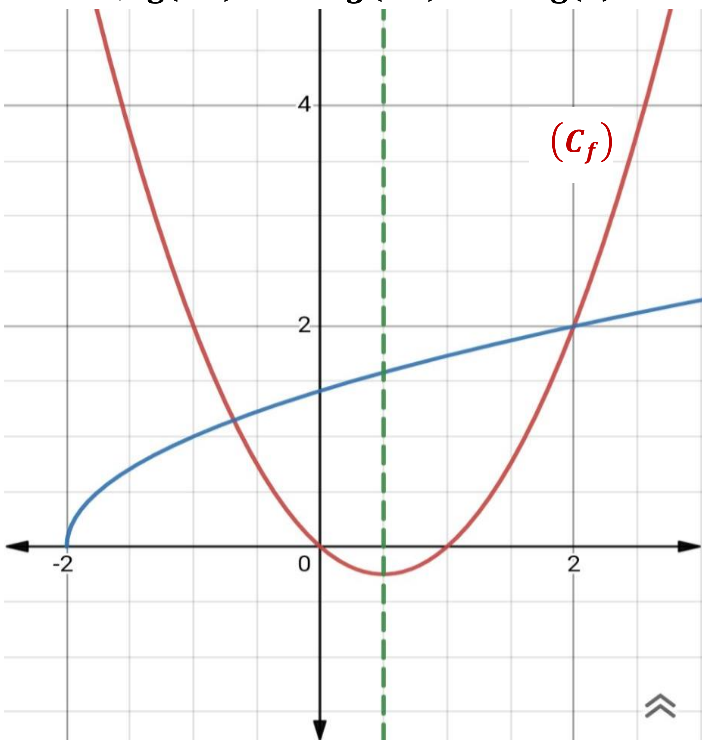
$$D_g = [-2; +\infty[$$

x	-2	$+\infty$
$g(x)$	0	↗

2)Représenter les courbes (C_f) *et* (C_g)

la courbe (C_f) est une parabole de sommet $\Omega(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ son axe de symétrie de plus f(2)=2

Et on a ; $g(-2) = 0$ et $g(-1) = 1$ et $g(2) = 2$



3)Déterminer $g\left(\left[-2; \frac{-7}{4}\right]\right)$ et $g\left(\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right[\right)$

$$g\left(\left[-2; \frac{-7}{4}\right]\right) = \left[g(-2); g\left(\frac{-7}{4}\right)\right] = \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

$$g\left(\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right[\right) = \left[g\left(\frac{-7}{4}\right); +\infty\right[= \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

4)Déterminer D_{fog} puis déterminer $fog(x)$

$x \in D_{fog} \Leftrightarrow x \in D_g \ et \ g(x) \in D_f$

$\Leftrightarrow x \in [-2; +\infty[\ et \ \sqrt{x+2} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x \in [-2; +\infty[\ et \ x \in [-2; +\infty[$

Donc : $D_{fog} = [-2; +\infty[$

Calculons : $fog(x)$ sur $D_{fog} = x \in [-2; +\infty[$

On a : $fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+2})$

$= (\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+2})$

5)Montrer que fog est minorée par $\frac{-1}{4}$

$$fog(x) - \left(\frac{-1}{4}\right) = (\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+2}) + \frac{1}{4}$$

$$= (\sqrt{x+2})^2 - 2 \times \frac{1}{2}(\sqrt{x+2}) + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{x+2} - \frac{1}{2}\right)^2$$

Donc: $fog(x) - \left(\frac{-1}{4}\right) \geq 0$; d'ou $fog(x) \geq \frac{-1}{4}$

6)Etudier la monotonie de fog sur $\left[-2; \frac{-7}{4}\right]$

- La fonction g est croissante sur $\left[-2; \frac{-7}{4}\right]$
- Et on a : $g\left(\left[-2; \frac{-7}{4}\right]\right) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$
- Et la fonction f est décroissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$
- Donc fog est décroisante sur $\left[-2; \frac{-7}{4}\right]$

Etudier la monotonie fog *sur* $\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right[$

- La fonction g est croissante sur $\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right[$
- $g\left(\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right[\right) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$
- Et f est croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$
- Donc fog est croisante sur $\left[\frac{-7}{4}; +\infty\right[$