Formation Agadir

www.formationagadir.com

Série 05
Ordre dans IR

Tronc commun science

Exercice 01

Comparer s et b dans chaque : $x\ ;\ y\ >0$

1) $a=\dfrac{x+y}{2}$; $b=\sqrt{xy}$

2) $a=1-\dfrac{x}{y}$; $b=\dfrac{y}{x}-1$

3) $a=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}\ +\ x}$; $b=\dfrac{1}{2x}$

Exercice 02

Soient x ;y et z des réels strictement positifs

1) Montrer que $x+y\geq 2\sqrt{xy}$
2) Déduire que :$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$
3) Montrer que $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

Exercice 03

Soients I ; J et K des intervalles tel que :

$I\ =]-3;\ 2]$ et $J\ =\ [0;\ 4]$: ; et $K=[1;+\infty[$

1) Déterminer $I\cap J$; $I\cup J$ et $I\cap K$
2) Déterminer le centre ; l'amplitude et le rayon de l'intervalle J
3) Donner un intervalle E tel que $E\cup K=\mathbb{R}$

Exercice 04

x et y tels que $x\in[-2;-1]$ et $y\in[2;5]$

1) Encadrer $2x+3y+7$ puis $2x-3y$
2) Encadrer xy ; x/y ; x^2+y^2 et $\sqrt{x+y}$

Exercice 05

Soients x et y deux réels tels que :

$1<x<\ 2$ et $\frac{1}{2}<y<\frac{3}{2}$

On pose $E=\ x^2-y^2+x+y$

1) Donner un encadrement de E
2) Factoriser le nombre E
3) En déduire que : $\frac{3}{4}<E<\frac{29}{4}$

Exercice 06

Soit x un réel tel que $4<x<\ 6$

On pose $C=\frac{2x+3}{x-2}$

1) Donner un encadrement de C puis calculer son amplitude
2) Vérifier que $C=2+\frac{7}{x-2}$
3) Déterminer un autre encadrement de C puis calculer son amplitude

Exercice 07

1) Ecrire les nombres suivants sans valeur absolu : $|3-\sqrt{2}|$; $|\sqrt{3}-2|$ et $|-1-\sqrt{5}|$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1): $|2x+8|=2$; (E_2): $|2x-8|=|3x-6|$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

(I_1): $|2x-8|<2$; (I_2): $|-3x+6|\geq 2$

Exercice 08

Soients a et b deux réels tels que :

$1\leq a$ et $b\leq 2$ et $a-b=3$

1) Montrer que :$\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(b-2)^2}=4$
2) Montrer que : $1\leq a\leq\ 5$ et $-2\leq b\leq 2$
3) Montrer que : $|a+b-7|+|a+b+1|=8$

Exercice 09

Soients x est un réel tel que $|x-2|<\frac{3}{2}$

1) Donner une approximation de x à $\frac{3}{2}$ près
2) Donner un encadrement de x
3) Donner une approximation de x par défaut puis par exès à la précision 3
4) Montrer que $|2x-3|<4$

Exercice 10

1) Comparer $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$
2) Développer $(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2$
3) On pose $A=\sqrt{55-12\sqrt{7}}$; simplifier A
4) Sachant que $1,7<\sqrt{3}<1,8$ et

$2,6<\sqrt{7}<2,7$; Donner un encadrement de A d'amplitude 0,5

5) Donner une approximation de A par défaut puis par exès d'amplitude 0,5

Exercice 11

1) Soit a une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{5}$ d'amplitude $\frac{1}{2}$; montrer que $\frac{-3}{10}<a<\frac{1}{5}$
2) Soit b une valeur approchée par exès de $\frac{1}{3}$ à 0, 1 prés ; montrer que $\frac{1}{3}<b<\frac{13}{30}$
3) Soit c une approximation de $\frac{1}{5}$ à la

précision $\frac{1}{2}$; montrer que $\frac{-3}{10}<c<\frac{7}{10}$

Exercice 12

1) Soit x un réel

Montrer que $\sqrt{1+x^2}\ -1=\dfrac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$

2) Montrer que $1+\sqrt{1+x^2}\geq 2$
3) Déduire que : $\left|\sqrt{1+x^2}\ -1\right|<\frac{1}{2}x^2$
4) Déterminer une valeur approchée de nombre $\sqrt{1,0001}$ à la précision 5×10^{-5}

Exercice 13

1) Montrer que $\left|\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1\right|<\frac{1}{2}x^2$
2) Trouver une approximation du nombre $\dfrac{1}{\sqrt{1,0004}}$ à la précision 2×10^{-4}

Exercice 01

Comparer s et b dans chaque : $x\ ;\ y > 0$

1) $a = \frac{x+y}{2}$; $b = \sqrt{xy}$

2) $a = 1 - \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{x} - 1$

3) $a = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$; $b = \frac{1}{2x}$

Solution de l'exercice 01

Comparer s et b dans chaque : $x\ ;\ y > 0$

1) $a = \frac{x+y}{2}$; $b = \sqrt{xy}$

$$a - b = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geq 0$$

$Donc:\ a - b \geq 0\ ;\ d'ou:\ a \geq b$

2) $a = 1 - \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{x} - 1$

$$a - b = 1 - \frac{x}{y} - (\frac{y}{x} - 1) = 2 - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{2xy - x^2 - y^2}{yx} = \frac{-(x^2 - 2xy + y^2)}{yx} = \frac{-(x-y)^2}{yx} \leq 0$$

$Donc:\ a - b \leq 0\ ;\ d'ou:\ a \leq b$

3) $a = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$; $b = \frac{1}{2x}$

$$a - b = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} - \frac{1}{2x} = \frac{2x - \sqrt{x^2+1} - x}{2x(\sqrt{x^2+1} + x)} = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{2x(\sqrt{x^2+1} + x)} = \frac{(x - \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{2x(\sqrt{x^2+1} + x)(x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{2x(\sqrt{x^2+1} + x)(x + \sqrt{x^2+1})} = \frac{-1}{2x(\sqrt{x^2+1} + x)(x + \sqrt{x^2+1})} < 0$$

$Donc:\ a - b < 0\ ;\ d'ou:\ a < b$

Exercice 02

x ;y et z des réels strictement positifs

1) Montrer que $x + y \geq 2\sqrt{xy}$

2) Déduire que

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$$

3) Montrer que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

Solution de l'exercice 02

1) Montrer que $x + y \geq 2\sqrt{xy}$

$$x + y - 2\sqrt{xy} = \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

Donc : $x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$

Donc : $x + y \geq 2\sqrt{xy}$

2)Déduire que $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$

On a : $x + y \geq 2\sqrt{xy}$

De mème on a : $y + z \geq 2\sqrt{yz}$

De mème on a : $z + x \geq 2\sqrt{zx}$

On a tous les termes des inégalités sont positifs donc on multiplie les inégalités terme à terme on trouve :

$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 2\sqrt{xy} \times 2\sqrt{yz} \times 2\sqrt{zx}$

$Donc:\ (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8\sqrt{xyyzzx}$

$Donc:\ (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8\sqrt{x^2y^2z^2}$

D'ou : $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$

3)Montrer que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{yx} = \frac{(x-y)^2}{yx} \geq 0$$

Car $yx > 0$ et $(x-y)^2 \geq 0$

$Donc:\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \geq 0$

$Donc:\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

Correction du série 05
Ordre dans IR

Exercice 03

Soient I ; J et K des intervalles tel que :

I $=]-3;\ 2]$ **et J** $=[0;\ 4]$ **: ; et** $K=[1;+\infty[$

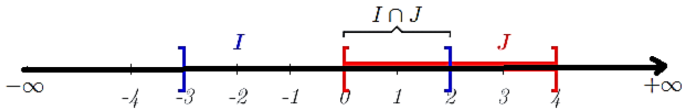
1) Déterminer $I\cap J$; $I\cup J$ **et** $I\cap K$

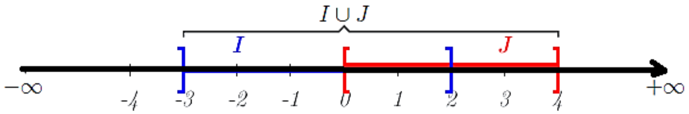
2) Déterminer le centre ; l'amplitude et le rayon de l'intervalle J

3)Donner un intervalle E tel que $E\cup K=\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 03

1) Déterminer $I\cap J$; $I\cup J$ **et** $I\cap K$





On a : $I\cap J=[0;2]$ **et on a :** $I\cup J=[-3;4]$

Et : $I\cap K=[1;\ 2]$

1) Rappel :

Soit $I=[a;b]$ **un intervalle de IR ;** $a<b$

On appelle amplitude de I le nombre $b-a$

On appelle centre de I le nombre $\frac{b+a}{2}$

Le rayon de I est le nombre $\frac{b-a}{2}$

L'amplitude de $[0;\ 4]$ **le nombre** $4-0=4$

Le centre de $[0;\ 4]$**: le nombre** $\frac{4+0}{2}=2$

Le rayon de I est le nombre $\frac{b-0}{2}=2$

3)Donner un intervalle E tel que $E\cup K=\mathbb{R}$

$E=]-\infty;1[$

Exercice 04

x et y tels que $x\in[-2;-1]$ **et** $y\in[2;5]$

1) Encadrer $2x+3y+7$ **puis** $2x-3y$

2) Encadrer xy ; x/y ; x^2+y^2 **et** $\sqrt{x+y}$

Solution de l'exercice 04

x et y tels que $x\in[-2;-1]$ **et** $y\in[2;5]$

➢ **Encadrer** $2x+3y+7$

On a : $x\in[-2;-1]$; *donc* $-2\le x\le -1$

Donc $-4\le 2x\le -2$

On a : $y\in[2;5]$; *donc* $2\le y\le 5$

Donc: $6\le 3y\le 15$

Donc: $-4+6\le 2x+3y\le -2+15$

Donc: $2\le 2x+3y\le 13$

Donc: $9\le 2x+3y+7\le 20$

➢ **Encadrer** $2x-3y$

On a: $6\le 3y\le 15$ *donc* $-15\le -3y\le -6$

Et on a : $-4\le 2x\le -2$

Donc: $-4+(-15)\le 2x+(-3y)\le -2-6$

Donc: $-19\le 2x-3y\le -8$

➢ **Encadrer** xy

On a : $-2\le x\le -1$; *donc:* $1\le -x\le 2$

Et on a : $2\le y\le 5$

Donc: $1\times 2\le -xy\le 2\times 5$

Donc: $2\le -xy\le 10$; *donc:* $-10\le xy\le -2$

➢ **Encadrer** $\frac{x}{y}$

On a : $2\le y\le 5$; *donc :* $\frac{1}{5}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{2}$

Et on a: $1\le -x\le 2$

Donc : $1\times\frac{1}{5}\le -x\times\frac{1}{y}\le 2\times\frac{1}{2}$

Donc : $\frac{1}{5}\le -\frac{x}{y}\le 1$; *d'ou* $-1\le\frac{x}{y}\le -\frac{1}{5}$

➢ **Encadrer** x^2+y^2

On a $-2\le x\le -1$

Donc $(-1)^2\le x^2\le(-2)^2$

Donc : $1\le x^2\le 4$

On a : $2\le y\le 5$; *donc* $4\le y\le 25$

Donc : $5\le x^2+y^2\le 29$

➢ **Encadrer** $\sqrt{x+y}$

On a : $-2\le x\le -1$ *et* $2\le y\le 5$

Donc : $0\le x+y\le 4$

Donc : $\sqrt{0}\le\sqrt{x+y}\le\sqrt{4}$

Donc : $0\le\sqrt{x+y}\le 2$

Exercice 05

Soient x et y deux réels tels que :

$1<x<2$ **et** $\frac{1}{2}<y<\frac{3}{2}$

On pose $E=x^2-y^2+x+y$

1) Donner un encadrement de E

2) Factoriser le nombre E

3) En déduire que : $\frac{3}{4}<E<\frac{29}{4}$

Solution de l'exercice 05

Soient x et y deux réels tels que :

$1 < x < 2$ et $\frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$

On pose $E = x^2 - y^2 + x + y$

1) Donner un encadrement de E

On a : $1 < x < 2$ et $\frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$

Donc $1 + \frac{1}{2} < x + y < 2 + \frac{3}{2}$

Donc $\frac{3}{2} < x + y < \frac{7}{2}$

Et on a : $1 < x^2 < 4$ et $\frac{1}{4} < y^2 < \frac{9}{4}$

Donc : $1 < x^2 < 4$ et $-\frac{9}{4} < -y^2 < -\frac{1}{4}$

Donc : $1 - \frac{9}{4} < x^2 - y^2 < 4 - \frac{1}{4}$

Donc : $-\frac{5}{4} < x^2 - y^2 < \frac{15}{4}$

Et on a : $\frac{3}{2} < x + y < \frac{7}{2}$

Donc : $-\frac{5}{4} + \frac{3}{2} < x^2 - y^2 + x + y < \frac{7}{2} + \frac{15}{4}$

D'où $\frac{1}{4} < x^2 - y^2 + x + y < \frac{29}{4}$

2) $E = x^2 - y^2 + x + y$

$= (x - y)(x + y) + x + y$

$= (x + y)(x - y + 1)$

3) En déduire que : $\frac{3}{4} < E < \frac{29}{4}$

On a : $E = (x + y)(x - y + 1)$

Et on a $1 < x < 2$ et $\frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$

Donc $-\frac{3}{2} < -y < -\frac{1}{2}$

Donc : $1 - \frac{3}{2} + 1 < x - y + 1 < 2 - \frac{1}{2} + 1$

Donc : $\frac{1}{2} < x - y + 1 < \frac{5}{2}$

Et on a ; $\frac{3}{2} < x + y < \frac{7}{2}$

Donc ; $\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} < (x + y)(x - y + 1) < \frac{7}{2} \times \frac{5}{2}$

Donc : $\frac{3}{4} < E < \frac{35}{4}$

Et on a : $\frac{1}{4} < E < \frac{29}{4}$ d'après la question 1)

D'où $\frac{3}{4} < E < \frac{29}{4}$

Exercice 06

Soit x un réel tel que $4 < x < 6$

On pose $C = \frac{2x+3}{x-2}$

1) Donner un encadrement de C puis calculer son amplitude

2) Vérifier que $C = 2 + \frac{7}{x-2}$

3) Déterminer un autre encadrement de C puis calculer son amplitude

Solution de l'exercice 06

1) On a $4 < x < 6$ donc $2 < x - 2 < 4$

Donc $\frac{1}{4} < \frac{1}{x-2} < \frac{1}{2}$

Et : $8 < 2x < 12$ donc $11 < 2x + 3 < 15$

Donc $11 \times \frac{1}{4} < (2x + 3) \times \frac{1}{x-2} < 15 \times \frac{1}{2}$

Donc $\frac{11}{4} < \frac{2x+3}{x-2} < \frac{15}{2}$

D'amplitude : $L_1 = \frac{15}{2} - \frac{11}{4} = \frac{19}{4}$

2)Vérifier que $C = 2 + \frac{7}{x-2}$

1ère méthode :

$$2 + \frac{7}{x-2} = \frac{2(x-2)+7}{x-2} = \frac{2x-4+7}{x-2} = \frac{2x+3}{x-2}$$

2ème méthode :

$$\frac{2x+3}{x-2} = \frac{2(x-2)+4+3}{x-2} = \frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{7}{x-2} = 2 + \frac{7}{x-2}$$

3)Déterminer un autre encadrement de C puis calculer son amplitude

On a : $C = 2 + \frac{7}{x-2}$

Et on a : $\frac{1}{4} < \frac{1}{x-2} < \frac{1}{2}$

Donc: $\frac{7}{4} < \frac{7}{x-2} < \frac{7}{2}$

Donc: $2 + \frac{7}{4} < 2 + \frac{7}{x-2} < 2 + \frac{7}{2}$

Donc: $\frac{15}{4} < \frac{7}{x-2} + 2 < \frac{11}{2}$

D'amplitude : $L_2 = \frac{11}{2} - \frac{15}{4} = \frac{7}{4}$

On remarque que : $L_2 < L_1$

Exercice 07

1) Ecrire les nombres suivants sans valeur absolu : $|3-\sqrt{2}|$; $|\sqrt{3}-2|$ et $|-1-\sqrt{5}|$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1): |2x+8| = 2$; $(E_2): |2x-8| = |3x-6|$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(I_1): |2x-8| < 2$; $(I_2): |-3x+6| \geq 2$

Rappels : Soit r un réel strictement positif

1) $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$

2) $|x| = r$ ssi $x = r$ ou $x = -r$

3) $|x| = |y|$ ssi $x = y$ ou $x = -y$

4) $|x| \leq r$ ssi $-r \leq x \leq r$

c.à.d : $x \in [-r; r]$.

5) $|x| \geq r$ ssi $(x \leq -r$ ou $x \geq r)$

c.à.d : $x \in]-\infty; -r] \cup [r; +\infty[$

Solution de l'exercice 07

1) Ecrire les nombres suivants sans valeur absolu : $|3-\sqrt{2}|$; $|\sqrt{3}-2|$ et $|-1-\sqrt{5}|$

$|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$

$|3-\sqrt{2}| = 3-\sqrt{2}$ *car* $3-\sqrt{2} > 0$

$|\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$ *car* $2-\sqrt{3} < 0$

$|-1-\sqrt{5}| = |-(1+\sqrt{5})| = 1+\sqrt{5}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$(E_1): |2x+8| = 2$

$|x| = r$ ssi $x = r$ ou $x = -r$

$|2x+8| = 2$ si $2x+8 = 2$ ou $2x+8 = -2$

c.à.d $2x = 2-8$ ou $2x = -2-8$

c.à.d $2x = -6$ ou $2x = -10$

c.à.d $x = -\frac{6}{2}$ ou $x = -\frac{10}{2}$

ssi $x = -3$ ou $x = -5$

Donc : $S = \{-3; -5\}$

$(E_2): |2x-8| = |3x-6|$

$|2x-8| = |3x-6|$

si $2x-8 = -3-6$ ou $2x-8 = -(3x-6)$

ssi $2x = -6$ ou $2x = -10$

ssi $x = -\frac{6}{2}$ ou $x = -\frac{10}{2}$

ssi $x = -3$ ou $x = -5$

Donc : $S = \{-3; -5\}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $(I_1): |2x-8| < 2$

$|x| \leq r$ ssi $-r \leq x \leq r$

$|2x-8| < 2$ ssi $-2 < 2x-8 < 2$

ssi $6 < 2x < 10$

ssi $3 < x < 5$

Donc : $S =]3; 5[$

(I_2) : $|-3x+6| \geq 2$

$|x| \geq r$ ssi $(x \leq -r$ ou $x \geq r)$

$|-3x+6| \geq 2$

ssi $(-3x+6 \leq -2$ ou $-3x+6 \geq 2)$

ssi $(-3x \leq -8$ ou $-3x \geq -4)$

ssi $(3x \geq 8$ ou $3x \leq 4)$

ssi $\left(x \geq \frac{8}{3}\right.$ ou $\left.x \leq \frac{4}{3}\right)$

c.à.d : $x \in \left[\frac{8}{3}; +\infty\right[$ ou $x \in \left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$

Donc : $S = \left]-\infty; \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{8}{3}; +\infty\right[$

Exercice 08

Soient a et b deux réels tels que :

$1 \leq a$ et $b \leq 2$ et $a - b = 3$

1) Montrer que : $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(b-2)^2} = 4$

2) Montrer que : $1 \leq a \leq 5$ et $-2 \leq b \leq 2$

3) Montrer que : $|a+b-7| + |a+b+1| = 8$

Rappels : Soit r un réel strictement positif

1) $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$

2) $\sqrt{x^2} = |x|$; $|x| = |-x|$. $|x-y| = |y-x|$

Solution de l'exercice 08

1) Montrer que : $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(b-2)^2} = 4$

$\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(b-2)^2} = |a-1| + |b-2|$

On a : $1 \leq a$ *donc* $0 \leq a-1$

Donc : $|a-1| = a-1$

On a : $b \leq 2$ *donc* $b-2 \leq 0$

Donc : $|b-2| = 2-b$

$$\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(b-2)^2} = |a-1| + |b-2|$$
$$= a-1+2-b$$
$$= a-b+1$$
$$= 3+1 = 4$$

2) Montrer que : $1 \leq a \leq 5$ et $-2 \leq b \leq 2$

On a : $1 \leq a$ et $a - b = 3$

Donc : $1 \leq a$ et $a = 3 + b$

Donc : $1 \leq 3 + b$

Donc : $1 - 3 \leq b$

Donc : $-2 \leq b$

Et on a : $b \leq 2$

Donc : $-2 \leq b \leq 2$

On a : $b \leq 2$ et $a - b = 3$

Donc : $b \leq 2$ et $b = a - 3$

Donc : $a - 3 \leq 2$

Donc : $a \leq 2 + 3$

Donc : $a \leq 5$

Et on a: $1 \leq a$

Donc : $1 \leq a \leq 5$

3)Montrer que $|a + b - 7| + |a + b + 1| = 8$

On a : $1 \leq a \leq 5$ et $-2 \leq b \leq 2$

Donc : $-1 \leq a + b \leq 7$

Donc $0 \leq a + b + 1$ et $a + b - 7 \leq 0$

Donc :

$|a + b - 7| + |a + b + 1|$

$= a + b + 1 - (a + b - 7)$

$= a + b + 1 - a - b + 7$

$= 8$

Exercice 09

Soient x est un réel tel que $|x - 2| < \frac{3}{2}$

1) Donner une approximation de x à $\frac{3}{2}$ près
2) Donner un encadrement de x
3) Donner une approximation de x par défaut puis par exès à la précision 3
4) Montrer que $|2x - 3| < 4$

Rappels :

Soit x un réel tel que : $a \leq x \leq b$ ou $a < x \leq b$ ou $a < x < b$

- Le réel a est appelé une valeur approchée par défaut de x à $b - a$ près. On dit aussi a est une approximation par défaut de x d'amplitude $b - a$.
- b est appelé une valeur approchée par excès de x à $b - a$ près.
- On dit que p est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r) lorsque: $|x - p| \leq r$

Solution de l'exercice 09

Soient x est un réel tel que $|x - 2| < \frac{3}{2}$

1) Donner une approximation de x à $\frac{3}{2}$ près

On a $|x - 2| < \frac{3}{2}$

Donc 2 est une approximation de x à $\frac{3}{2}$ près

2) Donner un encadrement de x

$|x - 2| < \frac{3}{2}$ c.à.d $-\frac{3}{2} < x - 2 < \frac{3}{2}$

c.à.d $-\frac{3}{2} + 2 < x < \frac{3}{2} + 2$

c.à.d $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$

3) Donner une approximation de A par défaut puis par exès à la précision 3

On a : $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$

L' amplitude de l'encadremant est :

$L = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Donc $\frac{7}{2}$ une approximation de x par exès à la précision 3

Donc $\frac{1}{2}$ une approximation de x par défaut à la précision 3

3)Montrer que $|2x - 3| < 4$

$\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$ c.à.d $1 < 2x < 7$

c.à.d $-2 < 2x - 3 < 4$

c.à.d $-4 < 2x - 3 < 4$

c.à.d $|2x - 3| < 4$

Exercice 10

1) Comparer $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$
2) Développer $(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2$
3) On pose $A=\sqrt{55-12\sqrt{7}}$ simplifier A
4) Sachant que $1,7<\sqrt{3}<1,8$ et $2,6<\sqrt{7}<2,7$; Donner un encadrement de A d'amplitude 0,5
5) Donner une approximation de A par défaut puis par exès d'amplitude 0,5

Solution de l'exercice 10

1) Comparer $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$

$2\sqrt{7}=4\sqrt{7}^2=28$

$3\sqrt{3}=9\sqrt{3}^2=27$

Donc $2\sqrt{7}>3\sqrt{3}$

2) Développer $(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2$

$$(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2=(3\sqrt{3})^2-12\sqrt{3}\sqrt{7}+(2\sqrt{7})^2$$
$$=27-12\sqrt{3}\sqrt{7}+28$$
$$=55-12\sqrt{7}$$

3) On pose $A=\sqrt{55-12\sqrt{7}}$ simplifier A

$$A=\sqrt{55-12\sqrt{7}}=\sqrt{(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2}$$
$$=|3\sqrt{3}-2\sqrt{7}|=2\sqrt{7}-3\sqrt{3}$$

Car : $2\sqrt{7}>3\sqrt{3}$

4) Sachant que $1,7<\sqrt{3}<1,8$ et $2,6<\sqrt{7}<2,7$; Donner un encadrement de A d'amplitude 0,5

$A=2\sqrt{7}-3\sqrt{3}$

On a : $1,7<\sqrt{3}<1,8$ et $2,6<\sqrt{7}<2,7$

Donc $-5,4<-3\sqrt{3}<-5,1$ et $5,2<2\sqrt{7}<5,4$

Donc : $5,2-5,4<2\sqrt{7}-3\sqrt{3}<5,4-5,1$

Donc : $-0,2<A<0,3$

L'amplitude de l'encadrement est

$L=0,3-(-0,2)=0,5$

5) Donner une approximation de A par défaut puis par exès d'amplitude 0,5

On a : $-0,2<A<0,3$

Donc 0,3 une une approximation de A par par exès d'amplitude 0,5

Et $-0,2$ est une approximation de A par défaut d'amplitude 0,5

Exercice 11

1) Soit a une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{5}$ d'amplitude $\frac{1}{2}$; montrer que $\frac{-3}{10}<a<\frac{1}{5}$
2) Soit b une valeur approchée par exès de $\frac{1}{3}$ à 0,1 prés ; montrer que $\frac{1}{3}<b<\frac{13}{30}$
3) Soit c une approximation de $\frac{1}{5}$ à la précision $\frac{1}{2}$; montrer que $\frac{-3}{10}<c<\frac{7}{10}$

Rappels :

- Le réel a est appelé une valeur approchée par défaut de x à r près.ssi
$$a\le x\le a+r$$
- b est appelé une valeur approchée par excès de x à r près.ssi
$$a-r\le x\le a$$
- On dit que a est une valeur approchée du nombre x à r près lorsque:
$$|x-a|\le r$$

Solution de l'exercice 11

1) Soit a une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{5}$ d'amplitude $\frac{1}{2}$; montrer que $\frac{-3}{10}<a<\frac{1}{5}$

On a le réel a une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{5}$ d'amplitude $\frac{1}{2}$

Donc : $a\le\frac{1}{5}\le a+\frac{1}{2}$

Donc $0\le\frac{1}{5}-a\le\frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{1}{5}\le -a\le\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$

Donc $-\frac{1}{5}\le -a\le\frac{3}{10}$

Donc : $\frac{-3}{10}<a<\frac{1}{5}$

2) Soit b une valeur approchée par exès de $\frac{1}{3}$ à $0,1$ prés ; montrer que $\frac{1}{3} < b < \frac{13}{30}$

Soit b une valeur approchée par exès de $\frac{1}{3}$ à $0,1$ prés

Donc : $b - 0,1 \leq \frac{1}{3} \leq b$

Donc : $-0,1 \leq \frac{1}{3} - b \leq 0$

Donc : $-0,1 - \frac{1}{3} \leq -b \leq -\frac{1}{3}$

Donc : $-\frac{33}{30} \leq -b \leq -\frac{1}{3}$

Donc : $\frac{1}{3} < b < \frac{13}{30}$

3) Soit c une approximation de $\frac{1}{5}$ à la précision $\frac{1}{2}$; montrer que $\frac{-3}{10} < c < \frac{7}{10}$

Soit c une approximation de $\frac{1}{5}$ à la précision $\frac{1}{2}$

Donc : $\left|\frac{1}{5} - c\right| \leq \frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2} < \frac{1}{5} - c \leq \frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2} - \frac{1}{5} < -c \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

Donc : $-\frac{7}{10} < -c \leq \frac{3}{10}$

Donc : $\frac{-3}{10} < c < \frac{7}{10}$

Exercice 12

1) Soit x un réel

Montrer que $\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$

2) Montrer que $1 + \sqrt{1+x^2} \geq 2$

3) Déduire que : $\left|\sqrt{1+x^2} - 1\right| < \frac{1}{2}x^2$

4) Déterminer une valeur approchée de nombre $\sqrt{1,0001}$ à la précision 5×10^{-5}

Solution de l'exercice 11

Soit x un réel

1) Montrer que $\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{\sqrt{1+x^2}^2 - 1^2}{1+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + x^2 - 1}{1+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

2) Montrer que $1 + \sqrt{1+x^2} \geq 2$

On a : $x^2 \geq 0$ *donc* $x^2 + 1 \geq 1$

donc $\sqrt{1+x^2} \geq 1$

donc $1 + \sqrt{1+x^2} \geq 2$

3) Déduire que : $\left|\sqrt{1+x^2} - 1\right| < \frac{1}{2}x^2$

On a : $\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$

Et on a : $1 + \sqrt{1+x^2} \geq 2$

Donc : $\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{2}$

Donc : $\frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x^2}{2}$

Donc : $\sqrt{1+x^2} - 1 \leq \frac{x^2}{2}$

Donc : $\left|\sqrt{1+x^2} - 1\right| \leq \frac{1}{2}x^2$

4) Déterminer une valeur approchée de nombre $\sqrt{1,0001}$ à la précision 5×10^{-5}

On a : $(*)$ $\left|\sqrt{1+x^2} - 1\right| \leq \frac{1}{2}x^2$

On prend $x = 0,01$ donc $x^2 = 0,0001$

Et : $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \times 0,0001 = 5 \times 10^{-5}$

On remplace dans $(*)$ *on trouve*

$\left|\sqrt{1,0001} - 1\right| \leq 5 \times 10^{-5}$

Donc 1 une valeur approchée de nombre $\sqrt{1,0001}$ à la précision 5×10^{-5}

Exercice 13

1) Montrer que $\left|\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1\right|<\frac{1}{2}x^2$

2) Trouver une approximation du nombre $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ à la précision 2×10^{-4}

Solution de l'exercice 13

1) Montrer que $\left|\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1\right|<\frac{1}{2}x^2$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1\right|=\left|\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}\right|$$

$$=\left|\frac{1^2-\sqrt{1+x^2}^2}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}\right|$$

$$=\left|\frac{1-1-x^2}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}\right|$$

$$=\left|\frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}\right|$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}$$

On a : $x^2\geq0$ *donc* $x^2+1\geq1$

donc $\sqrt{1+x^2}\geq1$

donc $1+\sqrt{1+x^2}\geq2$

donc $\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})\geq2$

Donc : $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}\leq\frac{1}{2}$

Donc : $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})}\leq\frac{x^2}{2}$

Donc : $\left|\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1\right|\leq\frac{1}{2}x^2$

2) Trouver une approximation du nombre $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ à la précision 2×10^{-4}

On a : $(*)$ $\left|\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1\right|\leq\frac{1}{2}x^2$

On prend $x=0,02$ donc $x^2=0,0004$

Et : $\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\times0,0001=2\times10^{-4}$

On remplace dans $(*)$ *on trouve*

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1,0004}}-1\right|\leq2\times10^{-4}$$

Donc 1 est une approximation du nombre $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ à la précision 2×10^{-4}