Formation Agadir

www.formationagadir.com

Série 04: Ensembles des nombres

Tronc commun science

Exercice 01

Compléter par : $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$:

$5 \ldots\ldots \mathbb{D}$; $-7 \ldots\ldots \mathbb{D}$; $\mathbb{N} \ldots\ldots \mathbb{R}$

$\mathbb{Z}^- \ldots\ldots \mathbb{Z}$; $\sqrt{3} \ldots\ldots \mathbb{Q}$; $-17 \ldots\ldots \mathbb{Z}^-$

$\frac{12}{2} \ldots\ldots \mathbb{N}$; $\mathbb{R} \ldots\ldots \mathbb{Q}$; $-\sqrt{\frac{12}{3}} \ldots\ldots . \mathbb{Z}$

Exercice 02

1) Soit x un réel strictement positif

Montrer que : $\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{x^2}{x+1}$

2) x et y deux réels tels que non nuls et $x + y \neq 0$ et $x - y \neq 0$, montrer que

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} - \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{y^2+x^2}{y^2-x^2}$$

Exercice 03

1) Simplifier les expressions suivantes :

$$X = \frac{b^{16}}{a^{10}} \times \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^2 \times \left(\frac{b^2}{a^4}\right)^4$$

$$Y = \frac{a^{-3} \times b \times (a^2 b^{-2})^4 \times a^5}{a^5 \times b^{-2} \times a^{-1} \times a^2 \times b^{-3}}$$

2) Montrer que

$$\frac{6^6 \times 27^4}{3^7 \times 12^2} = 3^9 \times 2^2$$

Exercice 04

1) Calculer et simplifier les nombres suivants :

$A = (2\sqrt{3} + \sqrt{5})(2\sqrt{3} - \sqrt{5})$

$B = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$

$C = \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \times \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$

Développer les expressions suivantes

$A = (2x - 3)^2 + (x + 2)^2$

$B = (x - 2)(x^2 + 4x + 4)$

$C = (x + 2)^3 - x(x - 1)^2$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$

Factoriser les expressions suivantes :

$A = 27x^3 + 8$

$B = 8x^3 - 1$

$C = 27 - x^3 - (x - 3)(x - 2) + 2(3 - x)^2$

Exercice 05

1) Montrer que $\sqrt{1 + \frac{1}{2}} \times \sqrt{1 - \frac{1}{3}} \in \mathbb{Q}$

2) Montrer que $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \in \mathbb{N}$

3) Montrer que $\left(\dfrac{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1 + \sqrt{3}}{3}\right)^2 \in \mathbb{N}$

Exercice 06

On pose $A = \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}}$

et $B = \sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{4 + \sqrt{7}}$

1) a) Déterminer le singe de A

b) Montrer que $A = -\sqrt{2}$

2) Simplifier B

3) On pose : $a = \sqrt{4 - \sqrt{7}}$ *et* $b = \sqrt{4 + \sqrt{7}}$

En déduire que $a = \frac{\sqrt{14} - \sqrt{2}}{2}$ *et* $b = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{2}}{2}$

Exercice 07

a et b deux réels tels que :

$a + b = 2$ et $a^2 + b^2 = 8$

1) a) Calculer la valeur de $a \times b$

b) En déduire la valeur de $a^3 + b^3$

2) Calculer $a^4 + b^4$, puis $a^6 + b^6$

Exercice 08

Soit x un réel strictement positif

1) Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

2) On pose

$$S = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

Montrer que $S \in \mathbb{N}$

Correction du série 04
Ensembles des nombres

Exercice 01

Compléter par : ∈ ; ∉; ⊂ ; ⊄ :

$5 \ldots\ldots \mathbb{D}$; $-7 \ldots\ldots \mathbb{D}$; $\mathbb{N} \ldots\ldots \mathbb{R}$

$\mathbb{Z}^- \ldots\ldots \mathbb{Z}$; $\sqrt{3} \ldots\ldots \mathbb{Q}$; $-17 \ldots\ldots \mathbb{Z}^-$

$\frac{12}{2} \ldots\ldots \mathbb{N}$; $\mathbb{R} \ldots\ldots \mathbb{Q}$; $\sqrt{-\frac{12}{3}} \ldots\ldots\ldots \mathbb{Z}$

Solution de l'exercice 01

Compléter par : ∈ ; ∉; ⊂ ; ⊄ :

$5 \in \mathbb{D}$; $-7 \in \mathbb{D}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Z}$; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$; $-17 \in \mathbb{Z}^-$

$\frac{12}{2} = 6 \notin \mathbb{N}$; $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$; $-\sqrt{\frac{12}{3}} = -4 \in \mathbb{Z}$

Exercice 02

1) Soit x un réel strictement positif

Montrer que : $\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{x^2}{x+1}$

2) x et y deux réels tels que non nuls et $x + y \neq 0$ et $x - y \neq 0$, montrer que

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} - \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{y^2+x^2}{y^2-x^2}$$

Solution de l'exercice 02

$$A = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{x} \times \frac{x}{1}$$

$$= \frac{1}{x+1} + x - 1$$

$$= \frac{1+(x-1)(x+1)}{x+1}$$

$$= \frac{1+x^2-1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

$$B = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} - \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{y-x}{xy}} - \frac{\frac{1}{y}}{\frac{y+x}{xy}}$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{xy}{y-x} - \frac{1}{y} \times \frac{xy}{y+x}$$

$$= \frac{y}{y-x} - \frac{x}{y+x}$$

$$= \frac{y}{y-x} - \frac{x}{y+x}$$

$$= \frac{y(y+x) - x(y-x)}{(y-x)(y+x)}$$

$$= \frac{y^2+yx-xy+x^2}{y^2-x^2}$$

$$= \frac{y^2+x^2}{y^2-x^2}$$

Exercice 03

1) Simplifier les expressions suivantes :

$$X = \frac{a^{16}}{a^{10}} \times \left(\frac{a^3}{a^2}\right)^2 \times \left(\frac{a^2}{a^4}\right)^4$$

$$Y = \frac{a^{-3} \times b \times (a^2 b^{-2})^4 \times a^5}{a^5 \times b^{-2} \times a^{-1} \times a^2 \times b^{-3}}$$

2) Monter que

$$\frac{6^6 \times 27^4}{3^7 \times 12^2} = 3^9 \times 2^2$$

Solution de l'exercice 03

$$X = \frac{a^{16}}{a^{10}} \times \left(\frac{a^3}{a^2}\right)^2 \times \left(\frac{a^2}{a^4}\right)^4$$

$$X = a^{16-10} \times (a^{3-2})^2 \times \left(\frac{1}{a^2}\right)^4$$

$$X = a^6 \times a^2 \times \frac{1}{a^8} = a^8 \times \frac{1}{a^8} = 1$$

$$Y = \frac{a^{-3} \times b \times (a^2 b^{-2})^4 \times a^5}{a^5 \times b^{-2} \times a^{-1} \times a^2 \times b^{-3}}$$

$$= \frac{a^{-3} \times (a^2)^4 \times a^5 \times b \times (b^{-2})^4}{a^5 \times a^{-1} \times a^2 \times b^{-2} \times b^{-3}}$$

$$= \frac{a^{-3} \times a^8 \times a^5 \times b \times b^{-8}}{a^5 \times a^{-1} \times a^2 \times b^{-2} \times b^{-3}}$$

$$= \frac{a^{-3+8+5} \times b^{1-8}}{a^{5-1+2} \times b^{-2-3}} = \frac{a^{10} \times b^{-7}}{a^6 \times b^{-5}}$$

$$= \frac{a^{10} \times b^5}{a^6 \times b^7} = a^{10-6} \times b^{5-7} = a^4 b^{-2} = \frac{a^4}{b^2}$$

2)Montrer que

$$\frac{6^6 \times 27^4}{3^7 \times 12^2} = 3^9 \times 2^2$$

$$\frac{6^6 \times 27^4}{3^7 \times 12^2} = \frac{(2 \times 3)^6 \times (3^3)^4}{3^7 \times (3 \times 2^2)^2}$$
$$= \frac{2^6 \times 3^6 \times 3^{12}}{3^7 \times 3^2 \times 2^4}$$
$$= 3^{6+12-7-2} \times 2^{6-4}$$
$$= 3^9 \times 2^2$$

Exercice 04

1) Calculer et simplifier les nombres suivants :

$A = (2\sqrt{3} + \sqrt{5})(2\sqrt{3} - \sqrt{5})$

$B = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$

$C = \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \times \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$

Développer les expressions suivantes

$A = (2x - 3)^2 + (x + 2)^2$

$B = (x - 2)(x^2 + 4x + 4)$

3) $C = (x + 2)^3 - x(x - 1)^2$ **Soit $x \in \mathbb{R}$**

Factoriser les expressions suivantes :

$A = 27x^3 + 8$

$B = 8x^3 - 1$

$C = 27 - x^3 - (x - 3)(x - 2) + 2(3 - x)^2$

Solution de l'exercice 04

1) Calculer et simplifier les nombres suivants :

$A = (2\sqrt{3} + \sqrt{5})(2\sqrt{3} - \sqrt{5})$

$= (2\sqrt{3})^2 - \sqrt{5}^2$

$= (2)^2 (\sqrt{3})^2 - 5$

$= 4 \times 3 - 5$

$= 12 - 5$

$= 7$

$B = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$

$= \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 - \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} - \sqrt{5}^2$

$= 2\sqrt{3}\sqrt{5} + 2\sqrt{3}\sqrt{5}$

$= 4\sqrt{3}\sqrt{5}$

$= 4\sqrt{15}$

$C = \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \times \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

$= \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})}$

$= \sqrt{\sqrt{7}^2 - \sqrt{3}^2}$

$= \sqrt{7 - 3}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$

Développer les expressions suivantes

$A = (2x - 3)^2 + (x + 2)^2$

$= 4x^2 - 12x + 9 + x^2 + 4x + 4$

$= 5x^2 - 8x + 13$

$B = (x - 2)(x^2 + 4x + 4)$

$= x^3 + 4x^2 + 4x - 2x^2 - 8x - 8$

$= x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$C = (x + 2)^3 - x(x - 1)^2$

$= x^3 + 3 \times 4x^2 + 3 \times 2x + 4 - x(x^2 - 2x + 1)$

$= x^3 + 12x^2 + 6x + 4 - x^3 + 2x^2 - x$

$= 14x^2 + 5x - 4$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$

Factoriser les expressions suivantes :

$A = 27x^3 + 8$

$= (3x)^3 + 2^3$

$= (3x + 2)((3x)^2 - 3x \times 2 + 2^2)$

$= (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$

$B = 8x^3 - 1$

$= (2x)^3 - 1^3$

$= (2x - 1)((2x)^2 + 2x \times 1 + 1)$

$= (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

$C = 27 - x^3 - (x - 3)(x - 2) + 2(3 - x)^2$

$= (3 - x)[(9 + 3x + x^2) + (x - 2) + 2(3 - x)]$

$= (3 - x)[9 + 3x + x^2 + x - 2 + 6 - 2x]$

$= (3 - x)[x^2 + 2x + 13]$

Correction du série 04
Ensembles des nombres

Exercice 06

On pose $A=\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$

et $B=\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}$

1) a) Déterminer le singe de A

c) Montrer que $A=-\sqrt{2}$

2) Simplifier B

3) On pose : $a=\sqrt{4-\sqrt{7}}$ *et* $b=\sqrt{4+\sqrt{7}}$

Montrer que $a=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$ *et* $b=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$

Solution de l'exercice 06

1)a) On a : $4-\sqrt{7}<4+\sqrt{7}$

Donc : $\sqrt{4-\sqrt{7}}<\sqrt{4+\sqrt{7}}$

Donc : $\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}<0$

Donc : $A<0$

2ème méthode : (Conjuguée)

$$\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}=\frac{(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}})(\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}})}{\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}$$

$$A=\frac{\sqrt{4-\sqrt{7}}^2-\sqrt{4+\sqrt{7}}^2}{\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}$$

$$=\frac{4-\sqrt{7}-4-\sqrt{7}}{\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}$$

$$=\frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}<0$$

b) Montrer que $A=-\sqrt{2}$

$$A^2=\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$$

$$=4-\sqrt{7}-2\sqrt{4-\sqrt{7}}\sqrt{4+\sqrt{7}}+4+\sqrt{7}$$

$$=8-2\sqrt{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}$$

$$=8-2\sqrt{16-7}$$

$$=8-2\sqrt{9}$$

$$=8-6$$

$$=2$$

Donc $A^2=2$ *donc* $A=\sqrt{2}$ *ou* $A=-\sqrt{2}$

et comme $A<0$ alors $A=-\sqrt{2}$

1) Simplifier B

$$B^2=\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$$

$$=4-\sqrt{7}+2\sqrt{4-\sqrt{7}}\sqrt{4+\sqrt{7}}+4+\sqrt{7}$$

$$=8+2\sqrt{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}$$

$$=8+2\sqrt{16-7}$$

$$=8+2\sqrt{9}$$

$$=8+6$$

$$=14$$

Donc $A^2=14$ *donc* $A=\sqrt{14}$ *ou* $A=-\sqrt{14}$

et comme $B>0$ alors $B=\sqrt{14}$

En déduire une écriture simplifier de

$$a=\sqrt{4-\sqrt{7}}\ \ et\ \ b=\sqrt{4+\sqrt{7}}$$

On a : $a+b=A$ *et* $a-b=B$

Donc: $a+b=\sqrt{14}$ *et* $a-b=-\sqrt{2}$

Doncc: $2a=\sqrt{14}-\sqrt{2}$; (L_1+L_2)

Donc $a=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$

Et on a : $a+b=\sqrt{14}$

Donc : $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}+b=\sqrt{14}$

onc : $b=\sqrt{14}-\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$

Donc : $b=\frac{2\sqrt{14}-\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}$

Donc : $b=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}$

Exercice 05

1) Montrer que $\sqrt{1+\frac{1}{2}}\times\sqrt{1-\frac{1}{3}}\in\mathbb{Q}$

2) Montrer que $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\in\mathbb{N}$

3) Montrer que $(\frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{3})^2+(\frac{1+\sqrt{3}}{3})^2\in\mathbb{N}$

Solution de l'exercice 05

1) Montrer que $\sqrt{1+\frac{1}{2}} \times \sqrt{1-\frac{1}{3}} \in \mathbb{Q}$

$$\sqrt{1+\frac{1}{2}} \times \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}}$$
$$= \sqrt{1}$$
$$= 1 \in \mathbb{Q}$$

Donc $\sqrt{1+\frac{1}{2}} \times \sqrt{1-\frac{1}{2}} \in \mathbb{Q}$

2) Montrer que $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$$
$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$
$$= \frac{\sqrt{3}^2+\sqrt{2}^2}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}$$
$$= \frac{3+2}{3-2} = 5 \in \mathbb{N}$$

3) Montrer que $\left(\frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^2 \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^2$$
$$= \frac{5-2\sqrt{3}}{9} + \frac{(1+\sqrt{3})^2}{9}$$
$$= \frac{5-2\sqrt{3}}{9} + \frac{1+2\sqrt{3}+3}{9}$$
$$= \frac{5-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}}{9}$$
$$= \frac{9}{9} = 1 \in \mathbb{N}$$

Solution de l'exercice 07

a et b deux réels tels que :

$a+b=2$ **et** $a^2+b^2=8$

1) a) Calculer la valeur de $a \times b$

On a : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
Donc : $2ab+a^2+b^2 = (a+b)^2$
Donc : $2ab = (a+b)^2-(a^2+b^2)$
Donc : $ab = \frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}$
Donc : $ab = \frac{(2)^2-(8)}{2}$
Donc : $ab = -2$

b) En déduire la valeur de a^3+b^3

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$= 2(8+2) \qquad = 20$$

2) Calculer a^4+b^4 **, puis** a^6+b^6

On a : $(a^2+b^2)^2 = a^4+2a^2b^2+b^4$
Donc : $(a^2+b^2)^2-2a^2b^2 = a^4+b^4$
Donc : $a^4+b^4 = (a^2+b^2)^2-2(ab)^2$
$= (8)^2-2(-2)^2$
$= 56$

On a : $(a^3+b^3)^2 = a^6+2a^3b^3+b^6$
Donc : $(a^3+b^3)^2-2a^3b^3 = a^6+b^6$
Donc : $a^6+b^6 = (a^3+b^3)^2-2(ab)^3$
$= (20)^2-2(-2)^3$
$= 400+16 = 416$

Solution de l'exercice 08

Soit x un réel strictement positif

1) Montrer que $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$
$$= \frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

3) On pose

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Montrer que $S \in \mathbb{N}$

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$
$$= \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}$$
$$= \sqrt{100}-\sqrt{1}$$
$$= 10-1 = 9 \in \mathbb{N}$$