Correction de série 01 : Ensemble $\mathbb{N}$ et d'arithmétique

Exercice 01 :

On pose $a = 6n + 11$ et $b = 2n + 4$; $n \in \mathbb{N}$

1) Étudier la parité des nombres a et b.

2) En déduire la parité de nombre :

$c = (6n + 11)(-1)^b + (2n + 3)(-1)^a$

3) Montrer que le nombre $(a + 1)^2 + b^2$ est un multiple de 40 .

Solution de l'exercice 01 :

On pose $a = 6n + 11$ et $b = 2n + 4$; $n \in \mathbb{N}$

1) Étudier la parité des nombres a et b.

$a = 6n + 11$

$= 6n + 10 + 1$

$= 2(3n + 5) + 1$

$= 2k + 1$ avec $k = 3n + 5$

Donc a est un entier impair

$b = 2n + 4$

$= 2(n + 2)$

$= 2k'$ avec $k' = n + 2$

Donc b est un entier pair

2) En déduire la parité de nombre :

$c = (6n + 11)(-1)^b + (2n + 3)(-1)^a$

On a b est un entier pair donc : $(-1)^b = 1$

Et a est impair donc $(-1)^a = -1$

Donc on remplace dans c on trouve que :

$c = (6n + 11)(-1)^b + (2n + 3)(-1)^a$

$= 6n + 11 - (2n + 3)$

$= 6n + 11 - 2n - 3$

$= 4n + 8$

$= 2(n + 4)$

$= 2p$ avec $p = n + 4$

Donc le nombre c est pair

3) Montrer que le nombre $(a + 1)^2 + b^2$ est un multiple de 40 .

$(a + 1)^2 + b^2 = (6n + 11 + 1)^2 + (2n + 4)^2$

$= (6n + 12)^2 + (2n + 4)^2$

$= (6(n + 2))^2 + (2(n + 2))^2$

$= 36(n + 2)^2 + 4(n + 2)^2$

$= 40(n + 2)^2$

$= 40\,p'$; avec $p' = (n + 2)^2$

Donc le nombre $(a + 1)^2 + b^2$ est un multiple de 40 .

Exercice 02 :

1) Étudier la parité des nombres :

$n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$.

2) Développer et réduire l'expression suivant : $(n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4)$; $n \in \mathbb{N}$

3) En déduire que $n^4 - n^2 + 16$ est un multiple du 4

Solution de l'exercice 02 :

1) Étudier la parité des nombres :

$n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$.

1ère méthode :

$n^2 - 3n + 4 = n^2 + n - 4n + 4$

$= n(n + 1) - 4n + 4$

$= 2k - 4n + 4 \quad (*)$

$= 2(k - 2n + 2)$

$= 2k'$ avec $k' = k - 2n + 2$

Donc $n^2 - 3n + 4$ est pair

$(*)$ $n(n + 1)$ est pair car il est produit de deux nombre consécutifs

2ème méthode : (Etude des cas)

n est un entier naturel donc n soit un nombre pair ou bien un nombre impair

Cas 1 :

Si n est pair alors : $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans $n^2 - 3n + 4$

$n^2 - 3n + 4 = (2k)^2 - 3 \times 2k + 4$

$= 4k^2 - 6k + 4$

$= 2(2k^2 - 3k + 2)$

$= 2p$, avec $p = 2k^2 - 3k + 2$

Donc $n^2 - 3n + 4$ est pair

Cas 2 :

Si n est impair alors : $n = 2k + 1$; $k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans $n^2 - 3n + 4$

$n^2 - 3n + 4 = (2k + 1)^2 - 3 \times (2k + 1) + 4$

$= 4k^2 + 4k + 1 - 6k - 3 + 4$

$= 4k^2 - 2k + 2$

$= 2(2k^2 - k + 1)$

$= 2p$, avec $p = 2k^2 - k + 1$

Donc $n^2 - 3n + 4$ est pair

Correction de série 01 : Ensemble $\mathbb{N}$ et d'arithmétique

La parité de n^2+3n+4

1ère méthode :

$$\begin{aligned}n^2+3n+4 &= n^2+n+2n+4\\ &= n(n+1)+2n+4\\ &= 2k+2n+4 \quad (*)\\ &= 2(k+n+2)\\ &= 2k' \ \ avec\ \ k'=k+n+2\end{aligned}$$

Donc n^2+3n+4 est pair

$(*)$ $n(n+1)$ est pair car il est produit de deux nombre consécutifs

2ème méthode : (Etude des cas)

Cas 1 :

Si n est pair alors : $n=2k\ \ avec\ \ k\in\mathbb{N}$

On remplace n dans n^2+3n+4

$$\begin{aligned}n^2+3n+4 &= (2k)^2+3\times 2k+4\\ &= 4k^2+6k+4\\ &= 2(2k^2+3k+2)\\ &= 2p\ \ ,avec\ \ p=2k^2+3k+2\end{aligned}$$

Donc n^2+3n+4 est pair

Cas 2 :

Si n est impair alors : $n=2k+1\ ;\ \ k\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}n^2+3n+4 &= (2k+1)^2+3\times(2k+1)+4\\ &= 4k^2+4k+1+6k+3+4\\ &= 4k^2+10k+8\\ &= 2(2k^2+5k+4)\\ &= 2p\ \ ,avec\ \ p=2k^2+5k+4\end{aligned}$$

Donc n^2+3n+4 est pair

2) Développer et réduire l'expression suivant : $(n^2-3n+4)(n^2+3n+4)$; $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&(n^2-3n+4)(n^2+3n+4)\\ &= (n^2+4-3n)(n^2+4+3n)\\ &= (n^2+4)^2-(3n)^2\\ &= n^4+8n^2+16-9n^2\\ &= n^4-n^2+16\end{aligned}$$

3) En déduire que n^4-n^2+16 est un multiple du 4

On a d'après la question 1)

$n^2-3n+4=2k$ et $n^2-3n+4=2p$

Donc :

$$\begin{aligned}n^4-n^2+16 &= (n^2-3n+4)(n^2+3n+4)\\ &= 2k\times 2p\\ &= 4k\,p\end{aligned}$$

Donc n^4-n^2+16 est un multiple du 4

Exercice 03 :

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est multiple de 4.

2) Est-ce qu'il existe un entier naturel n tel que : $n(n+1)(n+2)(n+3)=2010$?

Solution de l'exercice 03 :

1) On a le nombre $n(n+1)$ est produit de deux nombre consécutifs donc il est pair donc

$$n(n+1)=2k\ \ ,avec\ \ k\ un\ entier$$

Et on a le nombre $(n+2)(n+3)$ est produit de deux nombre consécutifs donc il est pair donc

$$(n+2)(n+3)=2p\ \ ,avec\ \ p\ un\ entier$$

Donc $n(n+1)(n+2)(n+3)=2k\times 2p$
$$=4\,kp$$

D'où le nombre $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est multiple de 4.

2) Est qu'il existe un entier naturel n tel que : $n(n+1)(n+2)(n+3)=2010$?

2010 n'est pas un multiple de 4

Donc il n'existe pas un entier naturel n tel que : $n(n+1)(n+2)(n+3)=2010$

Exercice 04 :

1) Soit n est un entier naturel impair

a) Montrer que n^2-1 est divisible par 8 .

b) En déduire que 16 divise n^4-1 .

2) Soient a et b deux entiers naturels impairs ,montrer que 16 divise a^4+b^4-2

Solution de l'exercice 04 :

1)a) On a n un entier naturel impair

Donc n=2k+1 avec k un entier :

$$\begin{aligned}n^2-1 &= (2k+1)^2-1\\ &= (2k)^2+2\times 2k+1-1\\ &= 4k^2+4k\\ &= 4\,k(k+1)\end{aligned}$$

($k(k+1)$ est produite de deux consécutifs)

Don : $n^2 - 1 = 4 \times 2k'$, avec k' un entier

$= 8\,k'$, avec k' un entier

b) En déduire que 16 divise $n^4 - 1$

On a :

$n^4 - 1 = (n^2)^2 - 1^2$

$= (n^2 - 1)(n^2 + 1)$

$= 8k'\ [(2k + 1)^2 + 1\ ]$

$= 8k'\ [(2k)^2 + 2 \times 2k + 1 + 1\ ]$

$= 8k'\ [4k^2 + 4k + 1 + 1\ ]$

$= 8k'\ [4k^2 + 4k + 2]$

$= 8k' \times 2[2k^2 + 2k + 1]$

$= 16\ k'[2k^2 + 2k + 1]$

$= 16\,p \quad avec\ p = k'[2k^2 + 2k + 1]$

Donc 16 divise $n^4 - 1$

2) Soient a et b deux entiers naturels impairs ,montrer que 16 divise $a^4 + b^4 - 2$

$a^4 + b^4 - 2 = a^4 - 1 + b^4 - 1$

On a d'après la question précédente 16 divise $a^4 - 1$ donc $a^4 - 1 = 16\,p$

Et 16 divise $b^4 - 1$ donc $b^4 - 1 = 16p'$

$a^4 + b^4 - 2 = a^4 - 1 + b^4 - 1$

$= 16p + 16p'$

$= 16(p + p')$

Donc 16 divise $a^4 + b^4 - 2$

Exercice 05 :

1) Vérifier que 337 est premier
2) Décomposer les nombres $a = 240$ et $b = 2022$ en produit de facteurs premiers.
2) En déduire $pgcd(a; b)$ *et* $ppcm(a; b)$.
3) Simplifier $\sqrt{240 \times 2022}$

Solution de l'exercice 06 :

1)Vérifier que 337 est premier

$\sqrt{337} = 18,35 \ldots$

Les nombres premiers inférieurs ou égales à 18 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13;17

On a 2, 3, 5 ne divise pas 337

Avec calculatrice en teste la divisibilité de 337 par 7 ; 11 ; 13 ; 17

On trouve 7 ; 11 ; 13 ; 17 ne divise pas 337

Donc 337 et premier

2)Décomposer $a = 240$ et $b = 2022$

240	2	;	2022	2
120	2	;	1011	3
60	2	;	337	337
30	2	;	1	
15	3	;		
5	5	;		
1		;		

Donc : $a = 2^4 \times 3 \times 5$ *et* $b = 2 \times 3 \times 337$

2) En déduire $pgcd(a; b)$ *et* $ppcm(a; b)$.

$a = 2^4 \times 3 \times 5 \quad et \quad b = 2 \times 3 \times 337$

$pgcd(a; b) = 2 \times 3 = 6$

$ppcm(a; b) = 2^4 \times 3 \times 5 \times 337$

3) Simplifier $\sqrt{240 \times 2022}$

$\sqrt{240 \times 2022} = \sqrt{2^4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 337}$

$= \sqrt{(2^2)^2 \times 3^2 \times 5 \times 2 \times 337}$

$= 2 \times 3 \times \sqrt{5 \times 2 \times 337}$

$= 6\sqrt{3370}$

Exercice 06 :

On pose que $a = 2160$ *et* $b = 4860$.

1) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a *et* b .
2) En déduire $pgcd(a; b)$*et* $ppcm(a; b)$.
3) Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers : $a^3 \times b^2$.
4) Montrer que $\sqrt{a \times b}$ est un entier naturel.
5) Écrire le nombre $\frac{a}{b}$ sous forme de fraction irréductible .

Solution de l'exercice 06 :

1) Décomposer $a = 2160$ *et* $b = 4860$.

2160	2	;	4860	2
1080	2	;	2430	2
540	2	;	1215	3
270	2	;	405	3
135	3	;	135	3
45	3	;	45	3
15	3	;	15	3
5	5	;	5	3
1		;	1	5

Donc : $a = 2^4 \times 3^3 \times 5$ *et* $b = 2^2 \times 3^5 \times 5$

2) En déduire $pgcd(a;b)$ *et* $ppcm(a;b)$.

$a = 2^4 \times 3^3 \times 5$ *et* $b = 2^2 \times 3^5 \times 5$

$pgcd(a;b) = 2^2 \times 3^3 \times 5$

$ppcm(a;b) = 2^4 \times\times 3^5 \times 5$

3) la décomposition de $a^3 \times b^2$

$a^3 \times b^2 = (2^4 \times 3^3 \times 5)^3 \times (2^2 \times 3^5 \times 5)^2$

$= 2^{12} \times 3^9 \times 5^3 \times 2^4 \times 3^{10} \times 5^2$

$= 2^{16} \times 3^{19} \times 5^5$

4) Montrer que $\sqrt{a \times b}$ est un entier

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{2^4 \times 3^3 \times 5 \times 2^2 \times 3^5 \times 5}$

$= \sqrt{2^6 \times 3^8 \times 5^2}$

$= \sqrt{(2^3)^2 \times (3^4)^2 \times 5^2}$

$= 2^3 \times 3^4 \times 5$

Donc $\sqrt{a \times b}$ est un entier naturel

5) Écrire le nombre $\frac{a}{b}$ sous forme de fraction irréductible .

$$\frac{a}{b} = \frac{2^4 \times 3^3 \times 5}{2^2 \times 3^5 \times 5}$$

$$= \frac{2^2 \times 2^2 \times 3^3 \times 5}{2^2 \times 3^3 \times 3^2 \times 5}$$

$$= \frac{2^2}{3^2}$$

Exercice 07:

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$a = 7^{n+2} - 7^n$ et $b = 3.7^{n+1} + 5.7^n$

1) Montrer que a est multiple de 3 et b multiple de 13 .

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a *et* b .

3) En déduire $pgcd(a;b)$ *et* $ppcm(a;b)$

Solution de l'exercice 07 :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$a = 7^{n+2} - 7^n$ et $b = 3.7^{n+1} + 5.7^n$

1) Montrer que a est multiple de 3 et b multiple de 13 .

$a = 7^{n+2} - 7^n$

$= 7^n \times 7^2 - 7^n$

$= 7^n(7^2 - 1)$

$= 7^n \times 48$

$= 7^n \times 3 \times 16$

Donc est multiple de 3

$b = (3 \times 7^{n+1}) + (5 \times 7^n)$

$= (3 \times 7^n \times 7) + (5 \times 7^n)$

$= 7^n(3 \times 7 + 5)$

$= 7^n \times 26$

$= 7^n \times 13 \times 2$

Donc b multiple de 13 .

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a *et* b .

On a d'aprés la question précédente

$a = 7^n \times 3 \times 16$

$= 7^n \times 3 \times 2^4$

les nombres 7 ; 3 et 2 sont premiers

$b = 7^n \times 13 \times 2$

les nombres 7 ; 13 et 2 sont premiers

D'où $a = 7^n \times 3 \times 2^4$ *et* $b = 7^n \times 13 \times 2$

3) En déduire $pgcd(a;b)$ *et* $ppcm(a;b)$

$pgcd(a;b) = 7^n \times 2$

$ppcm(a;b) = 7^n \times 2^4 \times 13 \times 3$

Exercice 08:

Soit n un entier naturel

1) Vérifier que : $\frac{n+7}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1}$

2) Déterminer les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles : $\frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N}$

3) Déterminer les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles : $\frac{3n+28}{n+4} \in \mathbb{N}$

Correction de série 01 : Ensemble $\mathbb{N}$ et d'arithmétique

Solution de l'exercice 08 :

Soit n un entier naturel

1)Vérifier que : $\frac{n+7}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1}$

1[ère] méthode :

$$1 + \frac{6}{n+1} = \frac{n+1+6}{n+1}$$
$$= \frac{n+7}{n+1}$$

2[ème] méthode :

$$\frac{n+7}{n+1} = \frac{n+1+6}{n+1}$$
$$= \frac{n+1}{n+1} + \frac{6}{n+1}$$
$$= 1 + \frac{6}{n+1}$$

2)Déterminer les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles : $\frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N}$

$\frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N}$ c-à-dire $1 + \frac{6}{n+1} \in \mathbb{N}$

c-à-dire $\frac{6}{n+1} \in \mathbb{N}$

c-à-dire 6 est divisible par n+1

Et on a les diviseurs de 6 sont 1 ;2 ;3 ;6

Donc $n + 1 = 1$; $c - à - dire$ $n = 0$

Ou bien: $n + 1 = 2$; $c - à - dire$ $n = 1$

Ou bien: $n + 1 = 3$; $c - à - dire$ $n = 2$

Ou bien: $n + 1 = 6$; $c - à - dire$ $n = 5$

Donc les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles : $\frac{n+7}{n+1} \in \mathbb{N}$ sont : 0 ;1 ; 2 ;5

3)
$$\frac{3n+28}{n+4} = \frac{3n+12+16}{n+4}$$
$$= \frac{3(n+4)+16}{n+4}$$
$$= \frac{3(n+4)}{n+4} + \frac{16}{n+4}$$
$$= 3 + \frac{16}{n+4}$$

$\frac{3n+28}{n+4} \in \mathbb{N}$ c-à-dire $3 + \frac{16}{n+4} \in \mathbb{N}$

c-à-dire $\frac{16}{n+4} \in \mathbb{N}$

c-à-dire 16 est divisible par n+4

Et on a les diviseurs de 6 sont 1 ;2 ;4 ;8 ;16

Donc $n + 4 = 1$ *donc* $n = -3 \notin \mathbb{N}$

Ou bien: $n + 4 = 2$ *donc* $n = -2 \notin \mathbb{N}$

Ou bien: $n + 4 = 8$; $c - à - dire$ $n = 4$

Ou bien: $n + 1 = 16$; $c - à - dire$ $n = 15$

Donc les valeurs de l'entier naturels n pour lesquelles $\frac{3n+28}{n+4} \in \mathbb{N}$ sont : 4 et 15

Exercice 09 :

1)montrer que $x + y$ *et* $x - y$ sont de même parité

2) Déterminer les diviseurs de 28

3) Déterminer tous les entiers naturels x *et* y qui vérifient : $x^2 - y^2 = 28$ (E)

4) Déterminer tous les couples (m ;n) d'entiers naturels tels que :

$mn + 3m + 2n = 18$

Solution de l'exercice 09 :

1)montrer que $x + y$ *et* $x - y$ sont de même parité

Ona : $x + y + x - y = 2x$

Donc la somme de $x + y$ *et* $x - y$ est un entier pair

Donc $x + y$ *et* $x - y$ sont de même parité

2) Déterminer les diviseurs de 28

Sont : 1 ; 2 ; 4 ;7 ; 14 ; 28

3) Déterminer tous les entiers naturels x *et* y qui vérifient : $x^2 - y^2 = 28$: (E)

$x^2 - y^2 = 28$ *donc* $(x - y)(x + y) = 28$

On a $x + y$ *et* $x - y$ sont de même parité

Donc il reste un seul possibilité :

$$28 = 2 \times 14$$

Et on a $x - y \leq x + y$

Donc : $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 14 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 2x = 16 & ; (L_1 + L_2) \\ x + y = 14 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x = 8 \\ x + y = 14 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x = 8 \\ 8 + y = 14 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$

Donc le couple $(x ; y)$qui vérifient : (E) est $(8 ; 6)$

Correction de série 01 : Ensemble $\mathbb{N}$ et d'arithmétique

4) Déterminer tous les couples (m ;n) d'entiers naturels tels que :

$mn + 3m + 2n = 28$

Donc : $m(n+3) + 2n + 6 = 28 + 6$

Donc : $m(n+3) + 2(n+3) = 34$

Donc : $(n+3)(m+2) = 34$

Les diviseurs de 34 sont 1 ;2 ; 17 ; et 34

Donc : $\begin{cases} n+3=1 \\ m+2=34 \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} n+3=34 \\ m+2=1 \end{cases}$

ou bien $\begin{cases} n+3=2 \\ m+2=17 \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} n+3=17 \\ m+2=2 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} n=-2 \notin \mathbb{N} \\ m=32 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n=31 \\ m=-11 \notin \mathbb{N} \end{cases}$

ou $\begin{cases} n=-1 \notin \mathbb{N} \\ m=15 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n+3=14 \\ m+2=0 \end{cases}$

Donc le couple (m ;n) d'entiers naturels tels que : $mn + 3m + 2n = 28$ est (0 ;14)

Exercice 10 :

1) Déterminer les entiers naturels x *et* y vérifiant $x^2 - y^2 = 51$.

2) Déterminer tous les couples (a ;b) d'entiers tels que:

$$a^2 - b^2 = 7344 \text{ et } a \wedge b = 12$$

Solution de l'exercice 10 :

1) Déterminer les entiers naturels x *et* y vérifiant (E): $x^2 - y^2 = 51$

$51 = 17 \times 3$ *ou* $51 = 3 \times 17$

ou $51 = 1 \times 51$ *ou* $51 = 51 \times 1$

On a $x + y$ *et* $x - y$ sont de même parité

Et on a $x - y \leq x + y$

Donc : $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=17 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 2x=20 & ; (L_1+L_2) \\ x+y=17 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x=10 \\ x+y=17 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x=10 \\ 10+y=17 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x=10 \\ y=7 \end{cases}$

ou bien $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=51 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 2x=52 & ; (L_1+L_2) \\ x+y=51 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x=26 \\ x+y=51 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x=26 \\ 26+y=51 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x=26 \\ y=25 \end{cases}$

Donc les couples $(x ; y)$ qui vérifient : (E)

sont $(10 ; 7)$ et $(26 ; 25)$

2) Déterminer tous les couples (a ;b) d'entiers tels que:

$$a^2 - b^2 = 7344 \text{ et } a \wedge b = 12$$

On a : $a \wedge b = 12$

Donc 12 divise a et 12 divise b

Donc $a = 12k$ *avec k un entier*

et $b = 12\,p$ *avec p un entier*

On remplace dans $a^2 - b^2 = 7344$ on trouve : $(12\,k)^2 - (12p)^2 = 7344$

Donc $144\,k^2 - 144\,p^2 = 7344$

Donc $144\,(k^2 - p^2) = 7344$

Donc $k^2 - p^2 = \frac{7344}{144}$

Donc $k^2 - p^2 = 51$

Et on a d'prés 1) les couples $(k ; p)$ qui vérifient $k^2 - p^2 = 51$

sont $(10 ; 7)$ et $(26 ; 25)$

Pour $k = 10$ on a $a = 12k = 12 \times 10 = 120$

Pour $p = 7$ on a $b = 12p = 12 \times 7 = 84$

Pour $k = 26$ on a $a = 12k = 12 \times 26 = 312$

Pour $p = 25$ on a $b = 12p = 12 \times 25 = 300$

les couples $(k ; p)$ qui vérifient

$$a^2 - b^2 = 7344 \text{ et } a \wedge b = 12$$

Sont $(120 ; 84)$ et $(312 ; 100)$