

Exercice 01

1) Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} et \overrightarrow{EF} , tels que :
 $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $D \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $F \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$.

3) Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCG$ soit un parallélogramme

4) Calculer les coordonnées de M , N et P milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

5) Calculer la distance AB

Correction

1) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2-(-1) \\ 3-(-2) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-(-4) \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2) $3\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \times 3 \\ 3 \times 2 \end{pmatrix}$ donc $3\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $4\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \times (-1) \\ 4 \times 5 \end{pmatrix}$ donc $4\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \end{pmatrix}$
 $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 9-(-4) \\ 6-20 \end{pmatrix}$ donc $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 13 \\ -14 \end{pmatrix}$

3) $ABCG$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GC}$.

On a alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GC} \begin{pmatrix} -1-x_G \\ -2-y_G \end{pmatrix}$

Donc : $-1-x_G = 3$ et $-2-y_G = 2$

$-x_G = 3+1$ et $-y_G = 2+2$

$x_G = -4$ et $y_G = -4$.

Les coordonnées du point G sont $(-4; -4)$

4) $M \begin{pmatrix} \frac{2+5}{2} \\ \frac{3+1}{2} \end{pmatrix}$ donc $M \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

$N \begin{pmatrix} \frac{2+(-1)}{2} \\ \frac{1+(-2)}{2} \end{pmatrix}$ donc $N \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$; $P \begin{pmatrix} \frac{5+(-1)}{2} \\ \frac{3+(-2)}{2} \end{pmatrix}$ donc $P \begin{pmatrix} 2 \\ -0,5 \end{pmatrix}$

5) La distance AB (ou norme du vecteur \overrightarrow{AB}) est égale à :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5-2)^2 + (3-1)^2} \\ &= \sqrt{(3)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

Exercice 02

1) Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix}$

2) On considère les points $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $D \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b) Démontrer que les points E , B et D sont alignés.

Correction

a) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 10 & -15 \end{vmatrix} = (-6) \times (-15) - 10 \times 9 = 90 - 90 = 0$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont donc colinéaires.

b) $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 9 & 23 \end{vmatrix} = 4 \times 23 - 9 \times 11 = 92 - 99 = -7 \neq 0$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont donc pas colinéaires.

2) a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 6-(-2) \\ -1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 8 \times 1 = 8 - 8 = 0$

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires. Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 03

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant

par le point $A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $B \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Correction

La droite (d) admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

• Comme $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d , on a : $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Soit $a = 5$ et $b = 1$.

Une équation de d est donc de la forme $5x + 1y + c = 0$.

• Pour déterminer c , il suffit de A dans l'équation :

$$5 \times 3 + 1 \times 1 + c = 0 \text{ donc } 15 + 1 + c = 0$$

$$\text{donc } 16 + c = 0 \text{ donc } c = -16$$

Une équation de d est donc $5x + 1y - 16 = 0$.

Remarque : Une autre méthode consiste à utiliser le déterminant :

b) • B et C appartiennent à (d') donc \overrightarrow{BC} est un vecteur directeur de (d')

$$\text{On a : } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}. \text{ Donc } a = -6 \text{ et } b = 4.$$

Une équation cartésienne de d' est de la forme : $-6x + 4y + c = 0$.

• $B \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient à d' donc : $-6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$ donc $c = 18$.

Une équation cartésienne de (d') est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $-3x + 2y + 9 = 0$.

Exercice 04

1) Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $6x - 10y - 5 = 0$ et $-9x + 15y = 0$ sont parallèles.

2) Déterminer une représentation paramétrique de (d_1) et (d_2)

Correction

2) Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d_1) .

Le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -15 \\ -9 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d_2) .

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 10 & -15 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 10 \times (-9) - 6 \times (-15) = 0$$

Donc \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et donc (d_1) et (d_2) sont parallèles.

1) La droite (d_1) passe par le point $A(0; -\frac{1}{2})$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\text{donc : } (d_1) \cdot \begin{cases} x = 6t \\ y = -\frac{1}{2} + 10t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

La droite (d_2) passe par le point $O(0; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -15 \\ -9 \end{pmatrix}$

$$\text{donc : } (d_2) \cdot \begin{cases} x = -15t \\ y = -9t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

Exercice 05

a) Soit la droite d d'équation cartésienne $6x + 3y - 5 = 0$.

Déterminer l'équation réduite de d .

b) Soit la droite d' d'équation cartésienne $y = 6x - 5$. Déterminer une équation cartésienne de d' .

Correction

a) On veut exprimer l'équation sous la forme $y = ax + b$. Il s'agit donc d'isoler y dans l'équation.

$$6x + 3y - 5 = 0 \text{ donc } 3y = -6x + 5$$

$$\text{Donc : } y = \frac{-6x+5}{3}$$

donc $y = -2x + \frac{5}{3}$: équation réduite de (d) .

b) On veut exprimer l'équation sous la forme $ax + by + c = 0$.

Il s'agit donc de ramener tous les termes de l'équation dans le membre de gauche. $y = 6x - 5$

$$-6x + y + 5 = 0 : \text{équation cartésienne de } d$$

Exercice 06

Déterminer la position relative des deux droites

$$\text{a) } d_1: y = -2x - 5 \text{ et } d_2: y = -2x + 4$$

$$\text{b) } d_3: y = 2x + 1 \text{ et } d_4: y = -3x + 8$$

$$\text{c) } d_5: y = -x + 7 \text{ et } d_6: y = 3$$

$$\text{d) } d_7: x = 1 \text{ et } d_8: x = -8$$

Correction

- 1) Les droites d_1 et d_2 sont parallèles car elles ont la même pente égale à -2 .
- 2) Les droites d_3 et d_4 sont sécantes car elles ont des pentes différentes 2 et -3 .
- 3) Les droites d_5 et d_6 sont sécantes car elles ont des pentes différentes -1 et 0 .
- 4) Les droites d_7 et d_8 sont parallèles car elles sont parallèles à l'axe des ordonnées.

Exercice 07

On considère les droites (D_m) définies par $(m - 1)x - my + 2 = 0$ avec m un paramètre réels

- 1) Montrer que tous réel m ; $A(2; 2)$ appartient à la droite (D_m)
- 2) Déterminer la valeur de m pour que $B(1; -2)$ appartient à (D_m)
- 3) Déterminer une valeur de m pour que la droite (D_m) soit parallèle à la droite (Δ) d'équation : $(\Delta) : 2x - 3y + 5 = 0$

Correction

On considère les droites (D_m) définies par $(m - 1)x - my + 2 = 0$ avec m un paramètre réels

- 1) Montrer que tous réel m ; $A(2; 2)$ appartient à la droite (D_m)

$$(m - 1) \times 2 - m \times 2 + 2 = 2m - 2 - 2m + 2 = 0$$

Donc $A(2; 2)$ appartient à la droite (D_m)

- 2) $B(1; -2)$ appartient à (D_m)

$$\text{Donc } (m - 1) \times 1 - m \times (-2) + 2 = 0$$

$$\text{Donc } m - 1 + 2m + 2 = 0 ; \text{ Donc } 3m + 1 = 0 ; \text{ Donc } m = -\frac{1}{3}$$

- 3) Déterminer une valeur de m pour que la droite (D_m) soit parallèle à la droite (Δ) d'équation : $(\Delta) : 2x - 3y + 5 = 0$

Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{u}(3; 2)$

Un vecteur directeur de $(m - 1)x - my + 2 = 0$ est $\vec{u}'(m; m - 1)$

$$\text{Donc } m = 3$$

Exercice 08

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$; on considère les points $A(5; 0)$; $B(2; 1)$ et $C(6; 3)$

- 1) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}
 - b) Calculer $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ et déduire que A ; B et C ne sont pas alignés
 - c) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A
- 2) a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)
 - b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) Passe par A est de vecteur directeur $\vec{U}(6; -2)$
 - c) Montrer que les droites (AB) et (Δ) sont parallèles
- 3) (D) et (D') deux droites telles que ; $(D) : \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$ et $(D') : x + 2y + 3 = 0$
 - a) Montrer que : $B \in (D)$ et $A \notin (D')$
 - b) Montrer que les droites (D) et (D') sont sécantes en un point I
 - c) Déterminer les coordonnées de points I

Correction

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$; on considère les points $A(5; 0)$; $B(2; 1)$ et $C(6; 3)$

- 3) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}

$$\overrightarrow{AB}(2 - 5; 1 - 0) \text{ donc } \overrightarrow{AB}(-3; 1)$$

$$\overrightarrow{AC}(6 - 5; 3 - 0) \text{ donc } \overrightarrow{AC}(1; 3)$$

- b) Calculer $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ et déduire que A ; B et C ne sont pas alignés

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \times 3 - 1 \times 1 = -10 \neq 0$$

Donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires

Donc les points A ; B et C ne sont pas alignés

c) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$$

Donc le triangle ABC est isocèle en A

$$BC = \sqrt{(6-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20}$$

$$AB^2 + AC^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{10}^2 = \sqrt{10}^2 = BC^2$$

Donc d'après théorème de PHITAGORE le triangle ABC est rectangle en A

4) a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

• A et B appartiennent à (AB) donc \overrightarrow{AB} est un vecteur directeur de (AB)

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $a = 1$ et $b = 3$.

Une équation cartésienne de (AB) est de la forme :

$$x + 3y + c = 0.$$

• A $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à (AB) donc : $5 + 3 \times 0 + c = 0$ donc $c = -5$.

Une équation cartésienne de (AB) est : $x + 3y - 5 = 0$

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite

(Δ) Passe par A est de vecteur directeur $\vec{U}(6; -2)$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = -2t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

c) Montrer que les droites (AB) et (Δ) sont parallèles

On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB)

Et $\vec{U} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ)

$$\det(\overrightarrow{AB}; \vec{U}) = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \times (-2) - 6 \times 1 = 0$$

Donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \vec{U} sont colinéaires

Donc les droites (AB) et (Δ) sont parallèles

3) (D) et (D') deux droites telles que ; (D) : $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

et (D') : $x + 2y + 3 = 0$

a) Montrer que : B ∈ (D) et A ∉ (D')

$$\begin{cases} x_B = 2 + 5t \\ y_B = 1 + t \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 2 = 2 + 5t \\ 1 = 1 + t \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \text{ donc } B \in (D)$$

$$x_A + 2y_A + 3 = 5 + 2 \times 0 + 3 = 8 \neq 0 \text{ donc } A \notin (D')$$

b) Montrer que les droites (D) et (D') sont sécantes en un point I

On a : $\vec{V} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D)

Et $\vec{V}' \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D')

$$\det(\vec{V}; \vec{V}') = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times (1) - (-2) \times 1 = 7 \neq 0$$

Donc les vecteurs \vec{V} et \vec{V}' ne sont pas colinéaires

Donc les droites (D) et (D') sont pas parallèles

D'où les droites (D) et (D') sont sécantes en un point I

c) Déterminer les coordonnées de points I

Pour déterminer les coordonnées de points I on av résoudre de

$$\text{système suivant (S): } \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + t \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + t \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \text{ donc } 2 + 5t + 2(1 + t) + 3 = 0$$

$$\text{Donc } 2 + 5t + 2 + 2t + 3 = 0$$

$$\text{Donc } 7 + 7t = 0 ; \text{ donc } 7t = -7$$

$$\text{Donc } t = -1$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_I = 2 + 5 \times (-1) \\ y_I = 1 + (-1) \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_I = -3 \\ y_I = 0 \end{cases}$$