A) Définition et propriétés

1) Définition du produit scalaire

Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

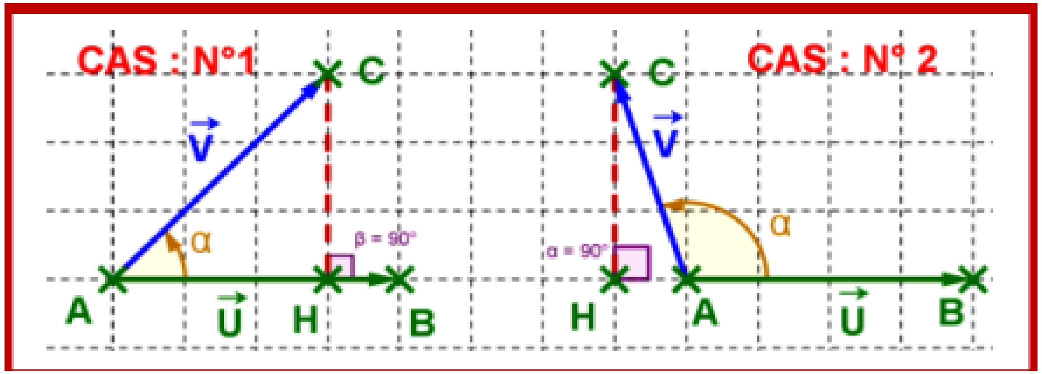
H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) on a

Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont une sens opposée alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -AB \times AH$



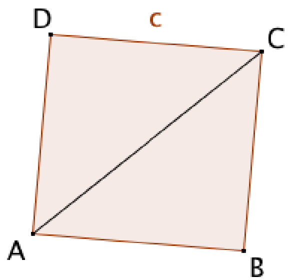
Exercice 1

Soit un carré ABCD de côté c.

Calculer, en fonction de c, les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

Solution de l'exercice 1



a) Par projection, on a :

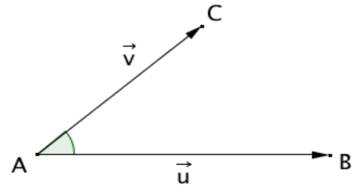
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = c^2$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} = -\|\overrightarrow{AD}\|^2 = -c^2$

3) Formule trigonométrique du produit scalaire

Propriété :



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par :

$\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul

- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$, dans le cas contraire.

$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

Remarque :

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\widehat{BAC}$

Exercice 2

Soit un triangle équilatéral ABC de côté a.

Calculer, en fonction de a, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Solution de l'exercice 2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\widehat{BAC} \\ &= a \times a \times \cos\frac{\pi}{3} \\ &= a^2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

2) Vecteurs orthogonaux

Propriété :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\vec{u}.\vec{v} = 0$

B) Propriété de symétrie du produit scalaire et applications

1) Propriété de symétrie du produit scalaire

Propriété de symétrie :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Démonstration :

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$

$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$

$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos\big(-(\vec{v}\,;\,\vec{u})\big)$

$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{v}\,;\,\vec{u})$

$= \vec{v}.\vec{u}$

2) Opérations sur les produits scalaires

Propriétés de bilinéarité :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

1) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

2) $\vec{u}.(k\vec{v}) = k\vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel.

3) Identités remarquables

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

3) $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Démonstration pour le 2) :

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$

$= \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$

$= \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

4) Produit scalaire et norme

Propriétés

Soit un vecteur $\vec{u}$, on a :

$\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$

Donc $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2$

On a ainsi : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Propriété 01 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

*$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

*$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

* $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Démonstration de la deuxième formule :

$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2$

$= \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

$= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

Exercice 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs., tels que

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 2$

1) Montrer que $\vec{u}.\vec{v} = 6$

2) Montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{28}$

3) On pose $\overrightarrow{u'} = \vec{u} - 2\vec{v}$ et $\overrightarrow{v'} = 5\vec{u} - 2\vec{v}$

a) Montrer que $\overrightarrow{u'}$ *et* $\overrightarrow{v'}$ sont orthogonaux

b) Calculer $\left\|\overrightarrow{u'}\right\|$

Solution de l'exercice 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs., tels que

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\| = 2$

1) Montrer que $\vec{u}.\vec{v} = 6$

On a : $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

Donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}((2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2^2)$

Donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(8+8-4)$

$= 6$

2) Montrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{28}$

On a : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Donc : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (2\sqrt{2})^2 + 2\times 6 + (2\sqrt{2})^2$

$= 28$

Donc $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{28}$

3) On pose $\overrightarrow{u'} = \vec{u} - 2\vec{v}$ et $\overrightarrow{v'} = 5\vec{u} - 2\vec{v}$

a) Montrer que $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont orthogonaux

$\overrightarrow{u'}.\overrightarrow{v'} = (\vec{u}-2\vec{v})(5\vec{u}-2\vec{v})$

$= 5\vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} - 10\vec{v}.\vec{u} + 4\vec{v}^2$

$= 5\|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} - 10\vec{u}.\vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2$

$= 5\|\vec{u}\|^2 + 4\|\vec{v}\|^2 - 12\,\vec{u}.\vec{v}$

$= 5\times 8 + 4\times 8 - 12\times 6 = 0$

Donc $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont orthogonaux

b) Calculer $\|\overrightarrow{u'}\|$

$\|\overrightarrow{u'}\|^2 = \|\vec{u}-2\vec{v}\|^2$

$= \|\vec{u}\|^2 - 4\vec{u}.\vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2$

$= (2\sqrt{2})^2 - 4\times 6 + 4(2\sqrt{2})^2$

$= 16$

Donc $\|\overrightarrow{u'}\| = 4$

Propriété 02 :

Soit A, B et C trois points du plan. On a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

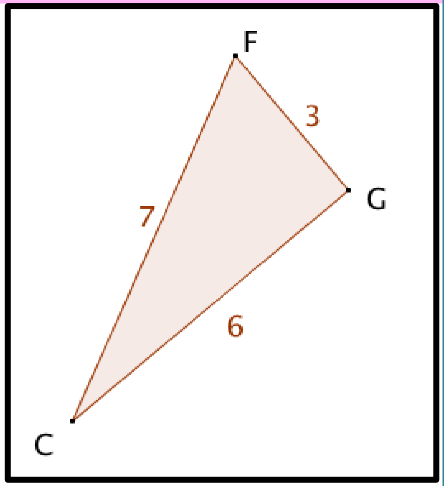
Démonstration :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2\right) = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Exercice 4

On considère la figure ci-contre , calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$.



Solution de l'exercice 4

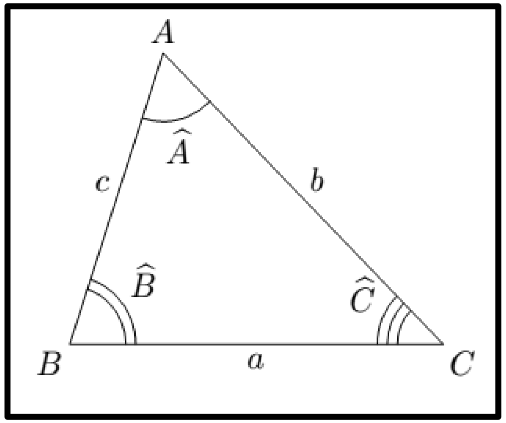
$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(CG^2 + CF^2 - GF^2)$

$= \frac{1}{2}(6^2 + 7^2 - 3^2)$

$= 38$

5) Théorème d'Al Kashi

Soit ABC un triangle, on pose $BC = a$; $AC = b$ et $AB = c$



- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AB \times AC \times \cos \widehat{A}$

  ou $a^2 = c^2 + b^2 - 2\ c \times b \times \cos \widehat{A}$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ AB \times BC \times \cos \widehat{B}$

  ou $b^2 = c^2 + a^2 - 2\ c \times a \times \cos \widehat{B}$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\ AC \times BC \times \cos \widehat{C}$

ou $c^2 = b^2 + a^2 - 2\ b \times a \times \cos \widehat{C}$

Démonstration :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{A} = bc \cos \widehat{A}$ et

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$

Donc : $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = bc \cos \widehat{A}$

Soit : $b^2 + c^2 - a^2 = 2\ bc \cos \widehat{A}$

Soit encore : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$

Exercice 5

Soit ABC un triangle, tels que $AB = \sqrt{7}$; $AC = 2$ et $BC = 3$

1) Calculer $\cos(B\widehat{A}C)$ puis montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1$

2) On pose $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

a) Calculer $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$

b) Montrer que les droites (MB) et (AC) sont orthogonaux

Solution de l'exercice 5

Soit ABC un triangle, on pose $AB = \sqrt{7}$; $AC = 2$ et $BC = 3$

1) Calculer $\cos(B\widehat{A}C)$ puis montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1$

D'après Théorème d'Al Kashi

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AB \times AC \times \cos(B\widehat{A}C)$

Donc $2\ AB \times AC \cos(B\widehat{A}C) = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Donc $\cos(B\widehat{A}C) = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\ AB \times AC}$

Donc $\cos(B\widehat{A}C) = \dfrac{\sqrt{7}^2 + 2^2 - 3^2}{2\sqrt{7} \times 2}$

Donc $\cos(B\widehat{A}C) = \dfrac{2}{4\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{14}$

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{7}^2 + 2^2 - 3^2\right)$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1$

2) On pose $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

a) Calculer $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} &= (\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}AC^2\\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\times 2^2\\ &= 1\end{aligned}$$

b) Montrer que les droites (MB) et (AC) sont orthogonaux

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\ &= -1+1\\ &= 0\end{aligned}$$

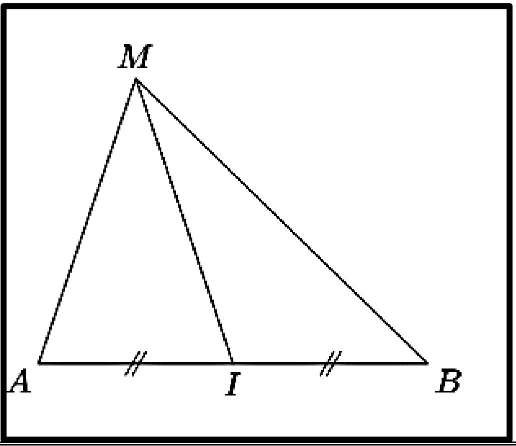
Donc $\overrightarrow{MB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux

Donc es droites (MB) et (AC) sont orthogonaux

6) Théorème de médiane

Soient A et B deux points du plan et I le milieu de segment $[AB]$, alors pour tout point M du plan on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



Exercice 6

Soit ABC un triangle et I le milieu de segment $[BC]$ tels que $IA = 3\ ;\ IB = IC = 2$

1) Calculer $AB^2 + AC^2$ *puis* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2) On pose $(B\hat{I}A) = \frac{\pi}{3}$, calculer $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IA}$

Solution de l'exercice 6

1) Calculer $AB^2 + AC^2$ *puis* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On a I le milieu de segment $[BC]$

Donc d'après théorème de médiane on a pour tout point M

$$MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

On pose $M = A$ on trouve :

$$\begin{aligned}AB^2 + AC^2 &= 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2\\ &= 2\times 3^2 + \frac{1}{2}\times 4^2\\ &= 26\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)\\ &= \frac{1}{2}(26 - 4^2)\\ &= 5\end{aligned}$$

2) On pose $(B\hat{I}A) = \frac{\pi}{3}$, calculer $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IA}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IA} &= IB\times IA\times \cos(B\hat{I}A)\\ &= 2\times 3\times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= 2\times 3\times\frac{1}{2}\\ &= 3\end{aligned}$$