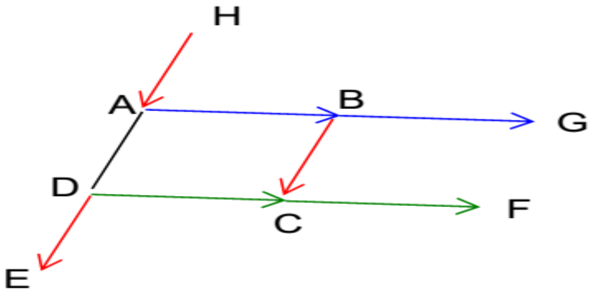
Cours 2 : Calcul vectoriel

A) Rappels :

Exercice 01

A partir du parallélogramme ABCD, construire les points E, F, G et H tels que : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$

Solution



Exercice 02

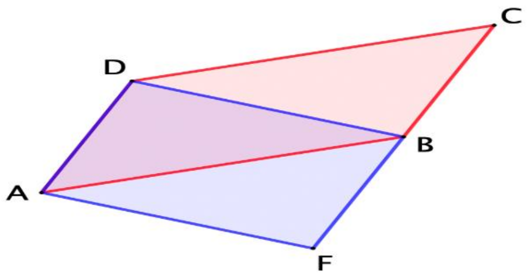
$ABCD$ et $AFBD$ sont deux parallélogrammes.

1) Réaliser une figure.

2) Démontrer que B est le milieu du segment $[CF]$.

Solution

1)



2) Dire que B est le milieu de $[CF]$ revient à dire que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF}$.

Démontrons-le.

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ car $ABCD$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA}$ car $AFBD$ est un parallélogramme.

Donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BF}$

Et donc en particulier : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF}$.

D'où B est le milieu de $[CF]$.

B) Généralités sur les vecteurs :

A et B deux vecteurs dans le plan (P)

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par trois données :

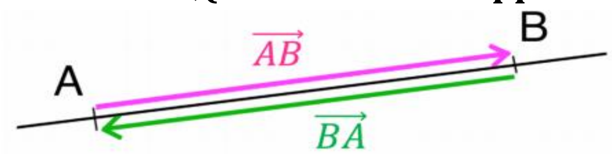
- Une direction : celle de droite (AB)
- Le sens : En partant de A vers B
- Une norme (longueur) ; c'est la distance AB

Il est noté par : $\|\overrightarrow{AB}\|$;

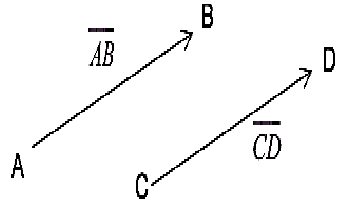
Donc $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

Remarque :

- Si A=B ; alors le vecteur est nul : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$
- Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$,($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposées)



- Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

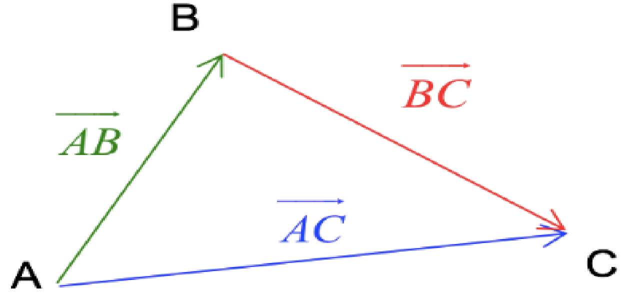


Somme de deux vecteurs

a) Relation de CHALES :

Soient A ; B et C trois points du plan (P)

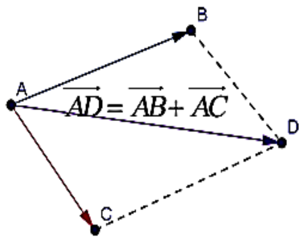
On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Cours 2 : Calcul vectoriel

a) Règle de parallélogramme

La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ tel que ABCD est un parallélogramme .



Exercice 03

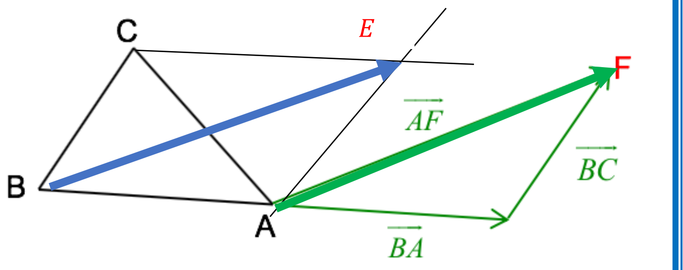
Soit un triangle ABC.Construire le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

Solution

On construit E tel que ABCF est un parallélogramme

On construit à partir de A le vecteur $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, puis on translatant les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ à A

On a ainsi construit le vecteur $\overrightarrow{AF}$ et le F



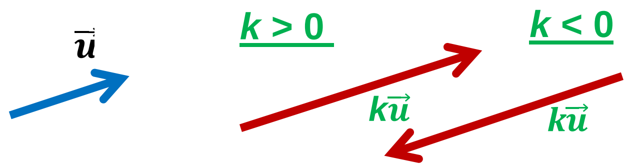
C) Produit d'un vecteur par un réel

1) Définition :

$\vec{u}$ est un vecteur quelconque non nul et k un nombre réel non nul.

On appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, le vecteur noté $k\vec{u}$:

- De même direction que $\vec{u}$,
- Même sens que $\vec{u}$ si k > 0 et de sens contraire si k < 0
- De norme égale à k fois la norme de $\vec{u}$ si k > 0, et –k fois norme de $\vec{u}$ si k < 0



Exercice 04

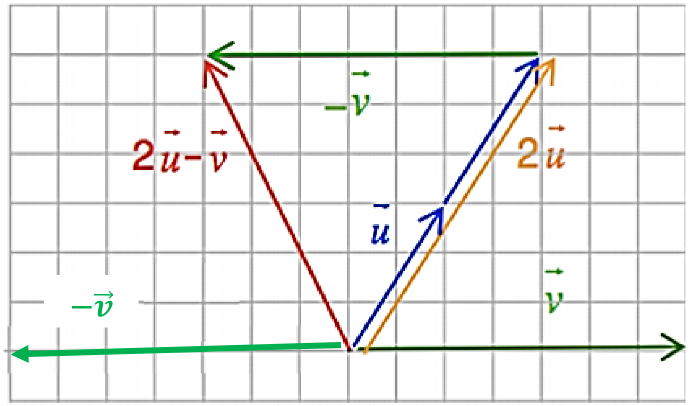
1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Représenter les vecteurs suivants :
$2\vec{u}$, $-\vec{v}$ et $2\vec{u} - \vec{v}$.
2) Soit trois points A, B et C.
   a) Représenter le vecteur $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$.
   b) Représenter le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$.

Solution

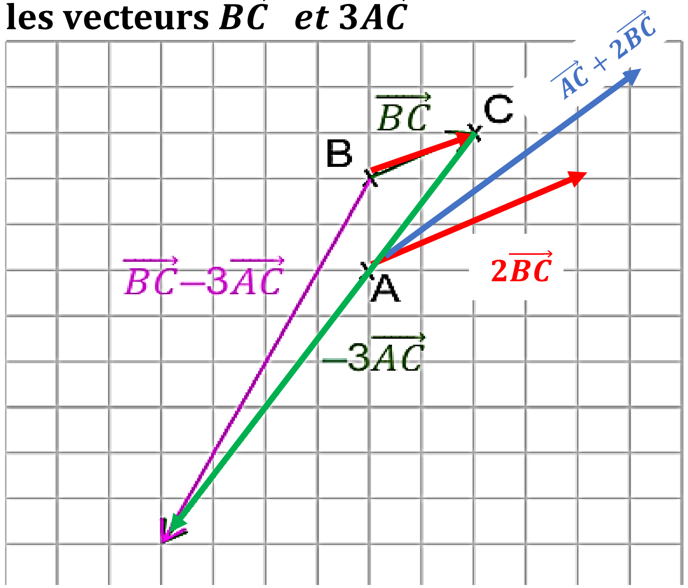
1) On commence par représenter le vecteur $2\vec{u}$:

• $-\vec{v}$ a la même direction et longueur que $\vec{v}$ mais il est de sens opposé.

• Pour représenter le vecteur $2\vec{u} - \vec{v} = 2\vec{u} + (-\vec{v})$, on place les vecteurs $2\vec{u}$ et $-\vec{v}$ bout à bout et on relit les extrémités du chemin construit.



b)Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC} + (-3\overrightarrow{AC})$, on place bout à bout les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $3\overrightarrow{AC}$



Exercice 05

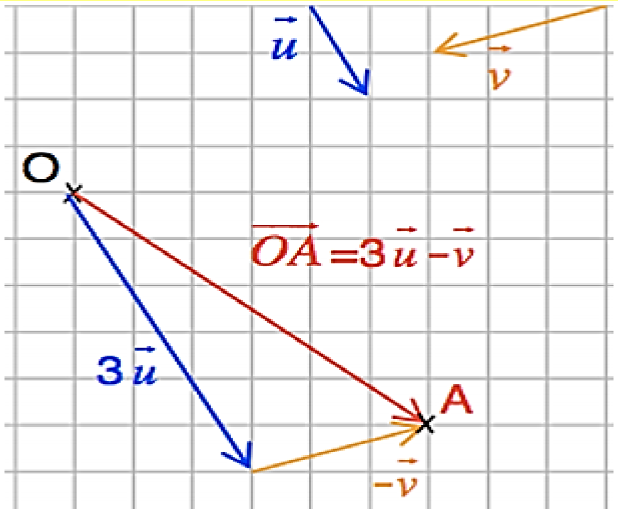
1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point O

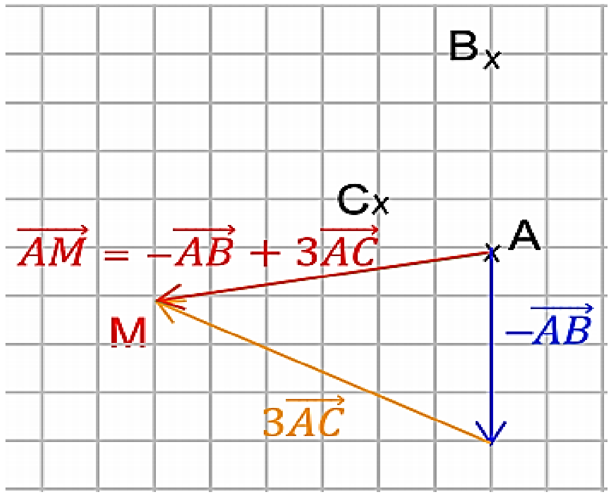
Construire A tel que $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$.

2) Soit trois points A, B, C du plan.

Construire M tel que $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

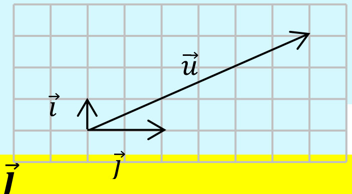
Solution





Exercice 06

Par lecture graphique écrire en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$



Solution ; $\vec{u} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$

Propriété :

$\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs et a et b deux réels

- $a.(b\vec{U}) = b(a\vec{U}) = ab\vec{U}$
- $(a+b)\vec{U} = a\vec{U} + b\vec{U}$;
- $a(\vec{U} + \vec{V}) = a\vec{U} + a\vec{V}$

2) Notion de colinéarité

Définition :

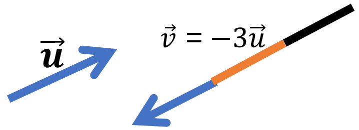
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'ils ont même direction c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque :

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Exemple :

$\vec{v} = -3\vec{u}$



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Exercice 07

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tel que $4\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{0}$

Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Solution

$4\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{0}$

$4\vec{u} = 3\vec{v}$

$\vec{u} = \frac{3}{4}\vec{v}$

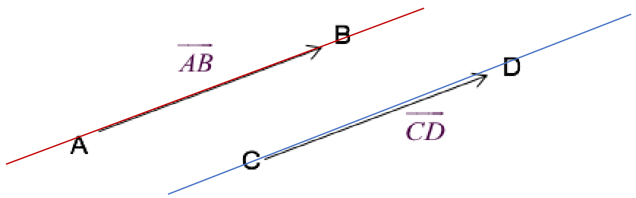
Il existe un nombre $k = \frac{3}{4}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

Propriétés :

A, B, C et D quatre points deux à deux distincts

1) Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



2) Dire que les points distincts A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 08

ABCD est un parallélogramme du plan

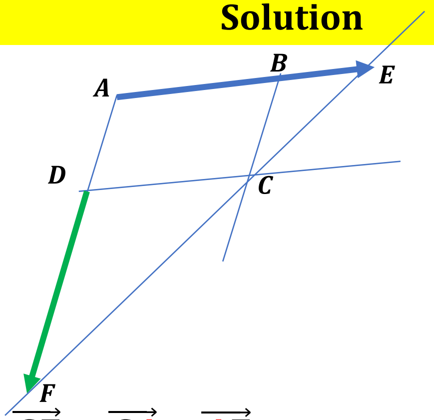
a) Construire les points E et F tel que : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF}=-2\overrightarrow{DA}$

b) Montrer que $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{FE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}$

c) En déduire que E ; F et C sont alignés

Solution

1)



2) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{CA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$=(-1+\frac{3}{2})\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}$

$=2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$

$=3\overrightarrow{DA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}$

3)En déduire que E ; F et C sont alignés

1ère méthode :

On a $\overrightarrow{FE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}$

$=3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)$

$=3\overrightarrow{CE}$

Donc les points E ; F et C sont alignés

2ème méthode :

On a $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{FE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}$

Donc $2\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}$ et $2\overrightarrow{FE}=3\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AD}$

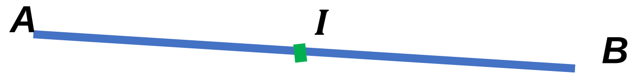
Donc $6\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AD}$ et $2\overrightarrow{FE}=3\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AD}$

Donc $6\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{FE}$

Donc $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{6}\overrightarrow{FE}$

Donc les points E ; F et C sont alignés

3)Milieu d'un segment



Définition :

On dit que le point I est le milieu de segment $[AB]$ si $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Propriétés

A ; B et I sont deux points du plan (P)

Les propositions 1) ;2) ;3) et4) sont équivalents

1) I le milieu de segment $[AB]$

2) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

3) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

4) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Caractérisation du milieu d'un segment

Activité

A , B et I sont des points du plan (P)
Montrer que si I le milieu du segment $[AB]$ signifie que pour tout point M on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

Théorème

A , B et I sont des points du plan (P)
Le point est I le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si pour tout point M de plan on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

Cours 2 : Calcul vectoriel

Exercice 09

ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$

1) a) Construire les points M et N tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

b) Montrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles

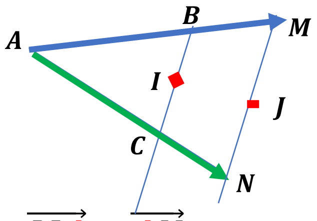
2) Soit J le milieu de segment $[MN]$

d) Montrer que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AI}$

e) En déduire que A ; I et J sont alignés

Solution

1) a)



b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

Donc $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

Donc (BC) et (MN) sont parallèles

2)a) Montrer que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AI}$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

On a I le milieu de segment $[BC]$

Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$

Donc $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2} \times 2\overrightarrow{AI}$

$$= 3\overrightarrow{AI}$$

b) En déduire que A ; I et J sont alignés

On a $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AI}$

Donc $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JM} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JN} = 3\overrightarrow{AI}$; $(*)$

Et on a J le milieu de segment $[MN]$

Donc $\overrightarrow{JM} + \overrightarrow{JN} = \vec{0}$

Donc $(*)$ devient $2\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AI}$

Donc $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ *et* $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires

Donc les points A ; I et J sont alignés

Exercice 10

ABCD est un parallélogramme de centre O

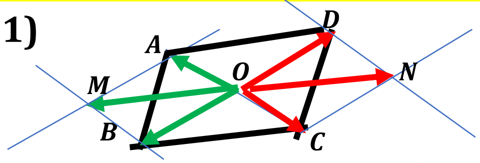
1) Construire les points M et N tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

2) Montrer que O est le milieu $[MN]$

3) Montrer que les droites (AD) et (MN) sont parallèles

Solution

1)



2) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

Donc: $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$

Et on a O est le milieu des segment $[AC]$

Donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Et on a O est le milieu des segment $[BD]$

Donc $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$

D'où $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$

Donc O est le milieu de segment $[MN]$

3) $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM}$

$$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

$$= 2\overrightarrow{AD}$$

Donc (AD) et (MN) sont parallèles