I) Comparaison de deux nombres réels

1) Définition

Soient a et b deux réels

Comparer a et b revient à étudier le signe de $a-b$

si $a-b \geq 0$ alors $a \geq b$

Si $a-b \leq 0$ alors $a \leq b$

Exemples

1) Comparer $a = 3\sqrt{5}$ et $b = 3+\sqrt{5}$

$$a-b = 3\sqrt{5}-(3+\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}-3 = \frac{(2\sqrt{5})^2-9}{2\sqrt{5}+3} = \frac{11}{2\sqrt{5}+3} > 0$$

Donc : $a-b > 0$ *donc* $a > b$

2) Comparer $a = x^2+4$ et $b = 4x$ avec $x \in \mathbb{R}$

$$a-b = x^2+4-4x = (x-2)^2 \geq 0$$

Donc : $a-b \geq 0$ *donc* $a \geq b$

2) L'ordre et les opérations dans $\mathbb{R}$

Soient a ; b ; c et d des réels

L'ordre et L'addition

- Si $a \leq b$ alors $a+c \leq b+c$
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors et $a+c \leq b+d$

L'ordre et la multiplication

- Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$
- Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$
- Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors et $ac \leq bd$
- Si $0 \leq a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$ et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
- Si $a \leq b \leq 0$ alors $a^2 \geq b^2$
- Si $ab > 0$ alors et $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Exercice 01

Comparer s et b dans chaque : x ; $y > 0$

1) $a = \frac{x+y}{2}$; $b = \sqrt{xy}$

2) $a = 1-\frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{x}-1$

3) $a = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$; $b = \frac{1}{2x}$

Solution de l'exercice 01

Comparer s et b dans chaque : x ; $y > 0$

1) $a = \frac{x+y}{2}$; $b = \sqrt{xy}$

$$a-b = \frac{x+y}{2}-\sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geq 0$$

Donc : $a-b \geq 0$; *d'ou* : $a \geq b$

2) $a = 1-\frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{x}-1$

$$a-b = 1-\frac{x}{y}-(\frac{y}{x}-1) = 2-\frac{x}{y}-\frac{y}{x} = \frac{2xy-x^2-y^2}{yx}$$

$$= \frac{-(x^2-2xy+y^2)}{yx} = \frac{-(x-y)^2}{yx} \leq 0$$

Donc : $a-b \leq 0$; *d'ou* : $a \leq b$

3) $a = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$; $b = \frac{1}{2x}$

$$a-b = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}-\frac{1}{2x} = \frac{2x-\sqrt{x^2+1}-x}{2x(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{2x(\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{2x(\sqrt{x^2+1}+x)(x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{x^2-(x^2+1)}{2x(\sqrt{x^2+1}+x)(x+\sqrt{x^2+1})}$$

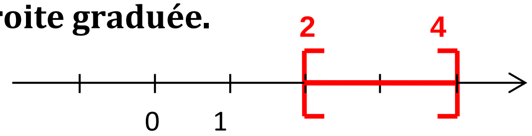
$$= \frac{-1}{2x(\sqrt{x^2+1}+x)(x+\sqrt{x^2+1})} < 0$$

Donc : $a-b < 0$; *d'ou* : $a < b$

II) Intervalles de $\mathbb{R}$

1. Notations

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $2 \leq x \leq 4$ peut se représenter sur une droite graduée.



Cet ensemble est appelé un intervalle et se note : $[2\,;4]$

Exemple :

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-2 \leq x \leq 7$ se note : $[-2\,;\,7]$.

On a par exemple :

$4 \in [-2\,;\,7]$

$-1 \in [-2\,;\,7]$

$8 \notin [-2\,;\,7]$

2. Intervalle ouvert et intervalle fermé

Définitions :

On dit qu'un intervalle est fermé si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.

On dit qu'il est ouvert dans le cas contraire.

Exemples :

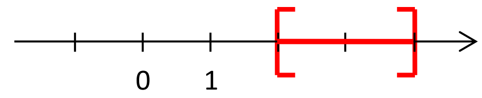
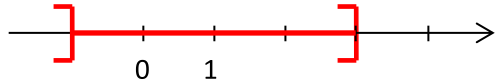
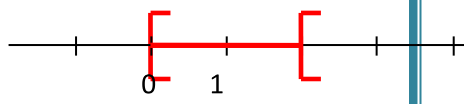
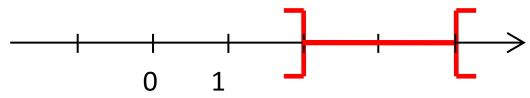
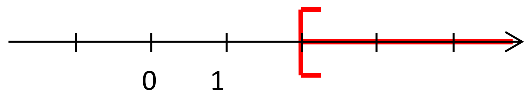
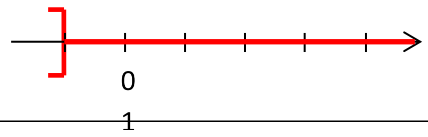
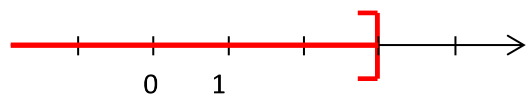
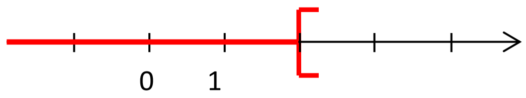
- L'intervalle $[-2\,;\,5]$ est un intervalle fermé.

On a : $-2 \in [-2\,;\,5]$ et $5 \in [-2\,;\,5]$

- L'intervalle $]2\,;\,6[$ est un intervalle ouvert.

On a : $2 \notin]2\,;\,6[$ et $6 \notin]2\,;\,6[$

- L'intervalle $]6\,;\,+\infty[$ est également un intervalle ouvert.

Nombre réel x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	$[2\,;\,4]$	
$-1 < x \leq 3$	$]-1\,;\,3]$	
$0 \leq x < 2$	$[0\,;\,2[$	
$2 < x < 4$	$]2\,;\,4[$	
$x \geq 2$	$[2\,;\,+\infty[$ ∞ désigne l'infini	
$x > -1$	$]-1\,;\,+\infty[$	
$x \leq 3$	$]-\infty\,;\,3]$	
$x < 2$	$]-\infty\,;\,2[$	

Remarque :

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un intervalle qui peut se noter $]-\infty\,;\,+\infty[$.

Exercice 03

Déterminer si chacun des nombres suivants appartient à l'intervalle $I = \left]\frac{3}{4}\ ;5\right]$.

$$1\ ;\frac{3}{4}\ ;\frac{5}{8}\ ;\ \sqrt{10}$$

Solution de l'exercice 02

- $1 \in I$, car $\frac{3}{4} < 1 \leq 5$.
- $\frac{3}{4} \notin I$, car I est un intervalle ouvert à gauche et donc son extrémité gauche, $\frac{3}{4}$, ne lui appartient pas.ss
- $\frac{5}{8} \notin I$, car $\frac{5}{8} = 0,625 < \frac{3}{4}$.
- $\sqrt{10} \in I$.

En effet : $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$, soit : $3 < \sqrt{10} < 4$

Et $]3\ ;4[\subset I$.

4. Application aux inéquations

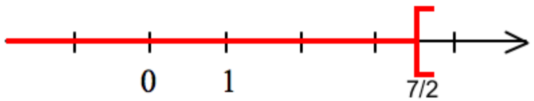
Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x. Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité.

Exercice 04

Résoudre l'inéquation et donner les solutions sous forme d'un intervalle : $2x - 3 < 4$

Solution de l'exercice 04

$$2x - 3 < 4$$
$$2x < 4 + 3$$
$$2x < 7$$
$$x < \frac{7}{2}$$



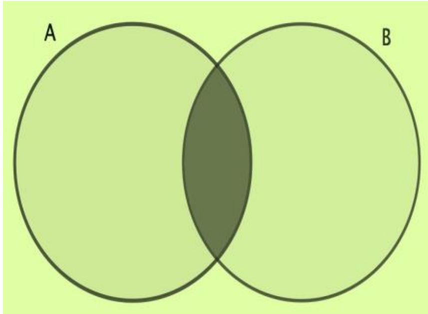
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ \frac{7}{2}\right[$.

3. Intersections et réunions d'intervalles :

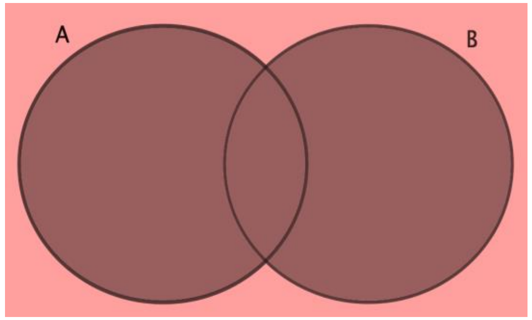
Définitions :

- L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B et se note A∩B.
- La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B et se note A∪B.

$A \cap B$



$A \cup B$



Exemple :

Soit les ensembles $A = \{1\ ;2\}$ et $B = \{1\ ;3\ ;4\}$.

Alors $A \cap B = \{1\}$ et $A \cup B = \{1\ ;2\ ;3\ ;4\}$

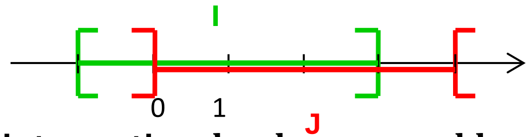
Exercice 05

Dans les cas suivants, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J :

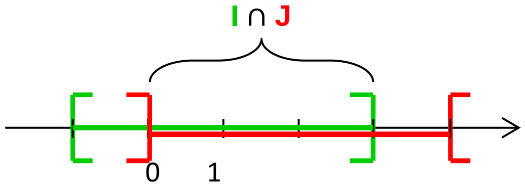
a) $I = [-1\ ;\ 3]$ et $J =]0\ ;\ 4[$ b) $I =]-\infty\ ;\ -1]$ et $J = [1\ ;\ 4]$

Solution de l'exercice 05

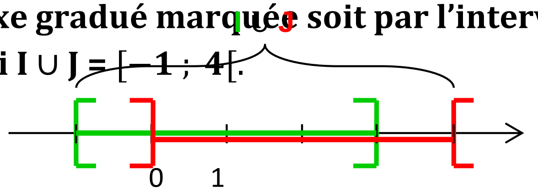
a) - On représente les intervalles I et J sur un même axe gradué.



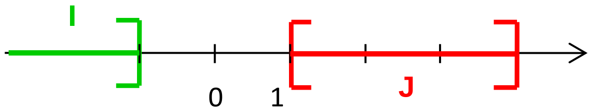
Les nombres de l'intersection des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent à la fois aux deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué où les deux ensembles se superposent. Ainsi $I \cap J =]0\ ;\ 3]$.



- Les nombres de la réunion des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit par l'intervalle I soit par l'intervalle J. Ainsi $I \cup J = [-1\ ;\ 4[$.



b)



- Ici, les ensembles I et J n'ont pas de zone en commun.
L'intersection des deux intervalles est vide.
Un ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et se note $\emptyset$.
On a alors : $I \cap J = \emptyset$
$I \cup J =]-\infty\ ;\ -1] \cup [1\ ;\ 4]$

3) Centre – amplitude – rayon d'un intervalle

Définitions :

Soit $I = [a; b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a < b$

On appelle **amplitude** de I le nombre $b - a$

On appelle **centre** de I le nombre $\frac{b+a}{2}$

Le **rayon** de I est le nombre $\frac{b-a}{2}$

Exercice 06

Soient I ; J et K des intervalles tel que :

$I =]-3;\ 2]$ et $J = [0;\ 4]$: ; et $K = [1; +\infty[$

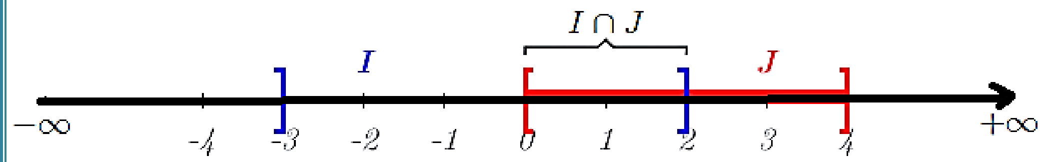
1) Déterminer $I \cap J$; $I \cup J$ et $I \cap K$

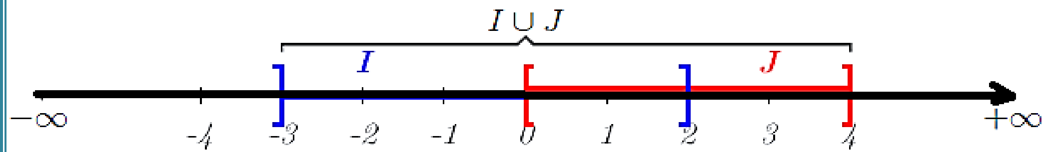
2) Déterminer le centre ; l'amplitude et le rayon de l'intervalle J

3) Donner un intervalle E tel que $E \cup K = \mathbb{R}$

Solution de l'exercice 06

1) Déterminer $I \cap J$; $I \cup J$ et $I \cap K$





On a : $I \cap J = [0; 2]$ et on a : $I \cup J = [-3; 4]$

$$Et :\ I \cap K = [1;\ 2]$$

2) **L'amplitude** de $[0;\ 4]$ le nombre $4 - 0 = 4$

Le **centre** de $[0;\ 4]$: le nombre $\frac{4+0}{2} = 2$

Le **rayon** de I est le nombre $\frac{b-0}{2} = 2$

3) Donner un intervalle E tel que $E \cup K = \mathbb{R}$

$$E =]-\infty; 1[$$

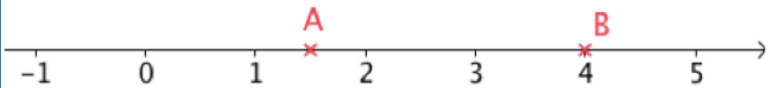
III) Valeur absolue d'un réel

Définition : Soit A le point d'abscisse x sur une droite graduée.
La valeur absolue de x est la distance entre O(0) et A(x)
On la note par $|x|$, donc on a :
$|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$

Exemples :
- La valeur absolue de – 5 est égale à 5 et on note $|-5| = 5$.
- La valeur absolue de 5 est égale à 5 et on note $|5| = 5$.
- $|11 - 13| = 2$ et $|13 - 11| = 2$

Propriété 01: Soit A et B deux points d'abscisses respectives a et b sur une droite graduée.
La distance entre les points A et B est le nombre $|a - b|$.

Exemple :
La distance entre les nombres $1,5$ et 4 est :
$|1,5 - 4| = |-2,5| = 2,5$



Résultat : Soient x et y des nombres réels
$|x| \geq 0$; $\sqrt{x^2} = |x|$; $|x| = |-x|$; $|x - y| = |y - x|$

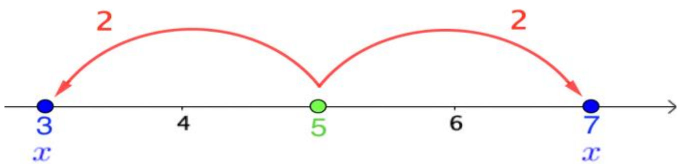
Exercice 07

Résoudre l'équation suivante $|x - 5| = 2$

Solution de l'exercice 07

$$|x - 5| = 2$$

La distance entre x et 5 est donc égale à 2.



On en déduit que : $x = 3$ ou $x = 7$.

Propriétés 02 :

Soit r un réel strictement positif et x un nombre réel
- $|x| = r$ ssi $x = r$ ou $x = -r$
- $|x| = |y|$ ssi $x = y$ ou $x = -y$

Exercice 08

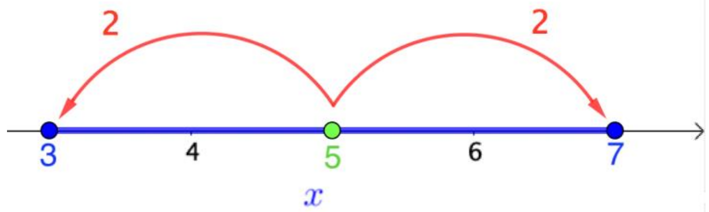
Résoudre l'inéquation suivante en s'aidant d'une droite graduée :
$|x - 5| \leq 2$

Solution de l'exercice 08

$|x - 5| \leq 2$

Distance entre x et 5

La distance entre x et 5 est donc inférieure ou égale à 2.



On en déduit que : $x \in [3 ; 7]$.

Valeur absolue et les intervalles

Propriété 03 :

Soit r un réel strictement positif et x un nombre réel
- $|x| \leq r$ ssi $-r \leq x \leq r$

  c.à.d : $x \in [-r; r]$.
- $|x| \geq r$ ssi $x \leq -r$ ou $x \geq r$

c.à.d : $x \in]-\infty; -r] \cup [r; +\infty[$

Exercice 09

1) Ecrire les nombres suivants sans valeur absolu :

$|3-\sqrt{2}|$; $|\sqrt{3}-2|$ et $|-1-\sqrt{5}|$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1): |2x+8| = 2$; $(E_2): |2x-8| = |3x-6|$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(I_1): |2x-8| < 2$; $(I_2): |-3x+6| \geq 2$

Solution de l'exercice 09

1) Ecrire les nombres suivants sans valeur absolu : $|3-\sqrt{2}|$; $|\sqrt{3}-2|$ et $|-1-\sqrt{5}|$

$|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$

$|3-\sqrt{2}| = 3-\sqrt{2}$ *car* $3-\sqrt{2} > 0$

$|\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$ *car* $2-\sqrt{3} < 0$

$|-1-\sqrt{5}| = |-(1+\sqrt{5})| = 1+\sqrt{5}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E_1): |2x+8| = 2$

$|x| = r$ ssi $x = r$ ou $x = -r$

$|2x+8| = 2$ si $2x+8 = 2$ ou $2x+8 = -2$

c. à. d $2x = 2-8$ ou $2x = -2-8$

c. à. d $2x = -6$ ou $2x = -10$

c. à. d $x = -\frac{6}{2}$ ou $x = -\frac{10}{2}$

ssi $x = -3$ ou $x = -5$

Donc : $S = \{-3; -5\}$

$(E_2): |2x-8| = |3x-6|$

$|2x-8| = |3x-6|$

si $2x-8 = -3-6$ ou $2x-8 = -(3x-6)$

ssi $2x = -6$ ou $2x = -10$

ssi $x = -\frac{6}{2}$ ou $x = -\frac{10}{2}$

ssi $x = -3$ ou $x = -5$

Donc : $S = \{-3; -5\}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $(I_1): |2x-8| < 2$

$|x| \leq r$ ssi $-r \leq x \leq r$

$|2x-8| < 2$ ssi $-2 < 2x-8 < 2$

ssi $6 < 2x < 10$

ssi $3 < x < 5$

Donc : $S =]3; 5[$

(I_2) : $|-3x+6| \geq 2$

$|x| \geq r$ ssi $(x \leq -r$ ou $x \geq r)$

$|-3x+6| \geq 2$

ssi $(-3x+6 \leq -2$ ou $-3x+6 \geq 2)$

ssi $(-3x \leq -8$ ou $-3x \geq -4)$

ssi $(3x \geq 8$ ou $3x \leq 4)$

ssi $\left(x \geq \frac{8}{3} \text{ ou } x \leq \frac{4}{3}\right)$

c. à. d : $x \in \left[\frac{8}{3}; +\infty\right[$ ou $x \in \left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$

Donc : $S = \left]-\infty; \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{8}{3}; +\infty\right[$

Exercice 10

Soient a et b deux réels tels que : $1 \leq a$ et $b \leq 2$ et $a-b = 3$

Montrer que : $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(b-2)^2} = 4$

Solution de l'exercice 10

Montrer que : $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(b-2)^2} = 4$

$\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(b-2)^2} = |a-1| + |b-2|$

On a : $1 \leq a$ *donc* $0 \leq a-1$

Donc : $|a-1| = a-1$

On a : $b \leq 2$ *donc* $b-2 \leq 0$

Donc : $|b-2| = 2-b$

$\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(b-2)^2} = |a-1| + |b-2|$

$= a-1+2-b$

$= a-b+1 \quad = 3+1 = 4$

V)Encadrement et Approximation

1) Définitions :

Soit x un réel tel que : $a \leq x \leq b$ ou $a < x \leq b$ ou $a < x < b$

- Le réel a est appelé une valeur approchée par défaut de x à $b - a$ près.
  On dit aussi que a est une approximation par défaut de x d'amplitude $b - a$.
- Le réel b est appelé une valeur approchée par excès de x à $b - a$ près.
- On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r) lorsque: $|x - a| \leq r$

Exercice 11

Soient x est un réel tel que $|x-2| < \frac{3}{2}$

1) Donner une approximation de x à $\frac{3}{2}$ près
2) Donner un encadrement de x
3) Donner une approximation de x par défaut puis par exès à la précision 3

Solution de l'exercice 11

Soient x est un réel tel que $|x-2| < \frac{3}{2}$

1) Donner une approximation de x à $\frac{3}{2}$ près

On a $|x-2| < \frac{3}{2}$

Donc 2 est une approximation de x à $\frac{3}{2}$ près

2) Donner un encadrement de x

$$|x-2| < \frac{3}{2} \quad \text{c.à.d} \quad -\frac{3}{2} < x - 2 < \frac{3}{2}$$

$$\text{c.à.d} \quad -\frac{3}{2} + 2 < x < \frac{3}{2} + 2$$

$$\text{c.à.d} \quad \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$$

3) Donner une approximation de A par défaut puis par exès à la précision 3

On a : $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$

L'amplitude de l'encadremant est :

$$L = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Donc $\frac{7}{2}$ une approximation de x par exès à la précision 3

Donc $\frac{1}{2}$ une approximation de x par défaut à la précision 3

Exercice 12

Soit x un réel tel que $4 < x < 6$

On pose $C = \frac{2x+3}{x-2}$

1) Donner un encadrement de C puis calculer son amplitude
2) Vérifier que $C = 2 + \frac{7}{x-2}$
3) Déterminer un autre encadrement de C puis calculer son amplitude

Solution de l'exercice 12

1) On a $4 < x < 6$ donc $2 < x - 2 < 4$

Donc $\frac{1}{4} < \frac{1}{x-2} < \frac{1}{2}$

Et : $8 < 2x < 12$ donc $11 < 2x + 3 < 15$

Donc $11 \times \frac{1}{4} < (2x+3) \times \frac{1}{x-2} < 15 \times \frac{1}{2}$

Donc $\frac{11}{4} < \frac{2x+3}{x-2} < \frac{15}{2}$

D'amplitude : $L_1 = \frac{15}{2} - \frac{11}{4} = \frac{19}{4}$

2)Vérifier que $C = 2 + \frac{7}{x-2}$

1ère méthode :

$$2 + \frac{7}{x-2} = \frac{2(x-2)+7}{x-2}$$

$$= \frac{2x - 4 + 7}{x - 2}$$
$$= \frac{2x + 3}{x - 2}$$

2ème méthode :

$$\frac{2x+3}{x-2} = \frac{2(x-2)+4+3}{x-2}$$
$$= \frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{7}{x-2}$$
$$= 2 + \frac{7}{x-2}$$

3)Déterminer un autre encadrement de C puis calculer son amplitude

On a : $C = 2 + \frac{7}{x-2}$

Et on a : $\frac{1}{4} < \frac{1}{x-2} < \frac{1}{2}$

Donc: $\frac{7}{4} < \frac{7}{x-2} < \frac{7}{2}$

Donc: $2 + \frac{7}{4} < 2 + \frac{7}{x-2} < 2 + \frac{7}{2}$

Donc: $\frac{15}{4} < \frac{7}{x-2} + 2 < \frac{11}{2}$

D'amplitude : $L_2 = \frac{11}{2} - \frac{15}{4} = \frac{7}{4}$

On remarque que : $L_2 < L_1$

2)Propriétés :

- **Le réel a est appelé une valeur approchée par défaut de x à r près ssi $a \leq x \leq a + r$**
- **Le réel b est appelé une valeur approchée par excès de x à r près ssi $a - r \leq x \leq a$**
- **Si $a \leq x \leq b$ alors $\frac{b+a}{2}$ est une approximation de x à $\frac{b-a}{2}$ près C-à-dire $a \leq x \leq b$ équivaut à $\left|x - \frac{b+a}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$**

Exercice 13

1) Soit a une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{5}$ d'amplitude $\frac{1}{2}$; montrer que $\frac{-3}{10} < a < \frac{1}{5}$
2) Soit b une valeur approchée par exès de $\frac{1}{3}$ à $0,1$ prés ; montrer que $\frac{1}{3} < b < \frac{13}{30}$
3) Soit c une approximation de $\frac{1}{5}$ à la précision $\frac{1}{2}$; montrer que $\frac{-3}{10} < c < \frac{7}{10}$

Solution de l'exercice 13

1) Soit a une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{5}$ d'amplitude $\frac{1}{2}$; montrer que $\frac{-3}{10} < a < \frac{1}{5}$

On a le réel a une valeur approchée par défaut de $\frac{1}{5}$ d'amplitude $\frac{1}{2}$

Donc : $a \leq \frac{1}{5} \leq a + \frac{1}{2}$

Donc $0 \leq \frac{1}{5} - a \leq \frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{1}{5} \leq -a \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

Donc $-\frac{1}{5} \leq -a \leq \frac{3}{10}$

Donc : $\frac{-3}{10} < a < \frac{1}{5}$

2) Soit b une valeur approchée par exès de $\frac{1}{3}$ à $0,1$ prés ; montrer que $\frac{1}{3} < b < \frac{13}{30}$

Soit b une valeur approchée par exès de $\frac{1}{3}$ à $0,1$ prés

Donc : $b - 0,1 \leq \frac{1}{3} \leq b$

Donc : $-0,1 \leq \frac{1}{3} - b \leq 0$

Donc : $-0,1-\frac{1}{3} \leq -b \leq -\frac{1}{3}$

Donc : $-\frac{33}{30} \leq -b \leq -\frac{1}{3}$

Donc : $\frac{1}{3} < b < \frac{13}{30}$

3) Soit c une approximation de $\frac{1}{5}$ à la précision $\frac{1}{2}$; montrer que $\frac{-3}{10} < c < \frac{7}{10}$

Soit c une approximation de $\frac{1}{5}$ à la précision $\frac{1}{2}$

Donc : $\left|\frac{1}{5} - c\right| \leq \frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2} < \frac{1}{5} - c \leq \frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2} - \frac{1}{5} < -c \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

Donc : $-\frac{7}{10} < -c \leq \frac{3}{10}$; *Donc* : $\frac{-3}{10} < c < \frac{7}{10}$

Exercice 14

1) Soit x un réel

Montrer que $\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$

2) Montrer que $1+\sqrt{1+x^2} \geq 2$

3) Déduire que : $\left|\sqrt{1+x^2} - 1\right| < \frac{1}{2}x^2$

4) Déterminer une valeur approchée de nombre $\sqrt{1,0001}$ à la précision 5×10^{-5}

Solution de l'exercice 14

Soit x un réel

1) Montrer que $\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}^2 - 1^2}{1+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2-1}{1+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

1) Montrer que $1+\sqrt{1+x^2} \geq 2$

On a : $x^2 \geq 0$ *donc* $x^2+1 \geq 1$

donc $\sqrt{1+x^2} \geq 1$

donc $1+\sqrt{1+x^2} \geq 2$

2) Déduire que : $\left|\sqrt{1+x^2} - 1\right| < \frac{1}{2}x^2$

On a : $\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$

Et on a : $1+\sqrt{1+x^2} \geq 2$; *Donc* : $\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{2}$

Donc : $\frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x^2}{2}$; *Donc* : $\sqrt{1+x^2} - 1 \leq \frac{x^2}{2}$

Donc : $\left|\sqrt{1+x^2} - 1\right| \leq \frac{1}{2}x^2$

3) Déterminer une valeur approchée de nombre $\sqrt{1,0001}$ à la précision 5×10^{-5}

On a : $(*)$ $\left|\sqrt{1+x^2} - 1\right| \leq \frac{1}{2}x^2$

On prend $x = 0,01$ donc $x^2 = 0,0001$

Et : $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \times 0,0001 = 5 \times 10^{-5}$

On remplace dans $(*)$ *on trouve*

$\left|\sqrt{1,0001} - 1\right| \leq 5 \times 10^{-5}$

Donc 1 une valeur approchée de nombre $\sqrt{1,0001}$ à la précision 5×10^{-5}

Exercice 15

1) Comparer $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$
2) Développer $(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2$
3) On pose $A=\sqrt{55-12\sqrt{7}}$ simplifier A
4) Sachant que $1,7<\sqrt{3}<1,8$ et
$2,6<\sqrt{7}<2,7$; Donner un encadrement de A d'amplitude 0,5
5) Donner une approximation de A par défaut puis par exès d'amplitude 0,5

Solution de l'exercice 15

6) Comparer $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$

$2\sqrt{7}=4\sqrt{7}^2=28 \quad et \quad 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}^2=27$

Donc $2\sqrt{7}>3\sqrt{3}$

7) Développer $(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2$

$(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2=(3\sqrt{3})^2-12\sqrt{3}\sqrt{7}+(2\sqrt{7})^2$

$=27-12\sqrt{3}\sqrt{7}+28=55-12\sqrt{7}$

8) On pose $A=\sqrt{55-12\sqrt{7}}$ simplifier A

$A=\sqrt{55-12\sqrt{7}}=\sqrt{(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^2}$

$=|3\sqrt{3}-2\sqrt{7}|=2\sqrt{7}-3\sqrt{3}$; Car : $2\sqrt{7}>3\sqrt{3}$

9) Sachant que $1,7<\sqrt{3}<1,8$ et
$2,6<\sqrt{7}<2,7$; Donner un encadrement de A d'amplitude 0,5

$A=2\sqrt{7}-3\sqrt{3}$

On a : $1,7<\sqrt{3}<1,8$ et $2,6<\sqrt{7}<2,7$

Donc $-5,4<-3\sqrt{3}<-5,1$ et $5,2<2\sqrt{7}<5,4$

$Donc$: $5,2-5,4<2\sqrt{7}-3\sqrt{3}<5,4-5,1$

$Donc$: $-0,2<A<0,3$

L'amplitude de l'encadrement est $L=0,3-(-0,2)=0,5$

5) Donner une approximation de A par défaut puis par exès d'amplitude 0,5

$On\ a$: $-0,2<A<0,3$

Donc $0,3$ une une approximation de A par par exès d'amplitude 0,5

Et $-0,2$ est une approximation de A par défaut d'amplitude 0,5

2) Approximation décimale

Exemple :

On a : $0,33333<\frac{1}{3}<0,33334$

Donc : $33333\times10^{-5}<\frac{1}{3}<33334\times10^{-5}$

Donc le nombre 33333×10^{-5} est appelé une approximation décimale de $\frac{1}{3}$ par défaut à 10^{-5} $près$

Et le nombre 33334×10^{-5} est une approximation décimale de $\frac{1}{3}$ par exès à 10^{-5} $près$

Définition

Soient x un réel et $N\in\mathbb{Z}$ et $p\in\mathbb{N}$

Si $N\times10^{-p}<x<(N+1)\times10^{-p}$

Alors le nombre $N\times10^{-p}$ est appelé une approximation décimale de x par défaut à 10^{-p} $près$

Et le nombre $(N+1)\times10^{-p}$ est une approximation décimale de x par exès à 10^{-p} $près$