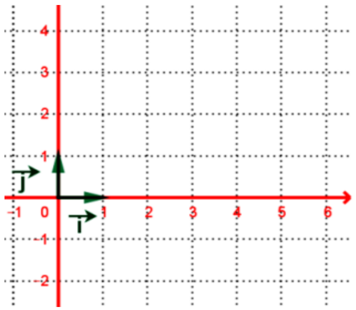
I) VECTEURS ET REPÉRAGE

1) Repère du plan

Trois points du plan non alignés O, I et J forment un repère, que l'on peut noter (O, I, J).

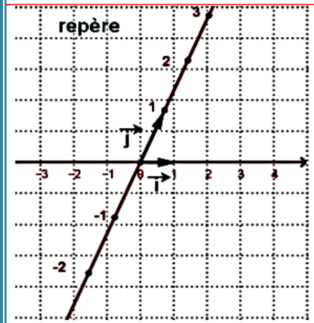
L'origine O et les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).

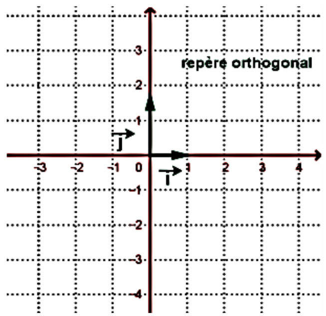
Si on pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

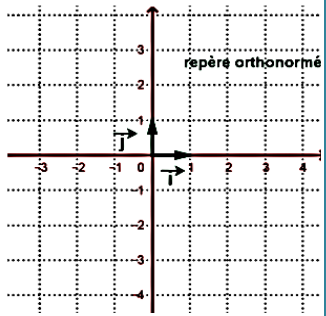


Définitions :

- On appelle repère du plan tout triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
- Un repère est dit orthogonal si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.
- Un repère est dit orthonormé s'il est orthogonal et si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de norme 1.





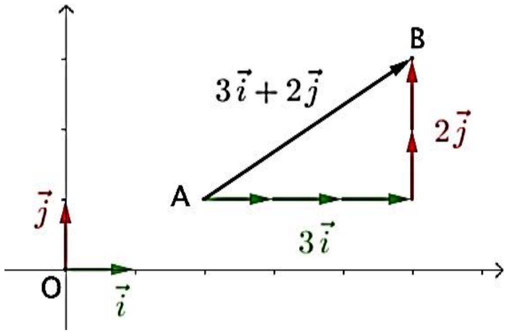


2) Coordonnées d'un vecteur

Exemple :

Pour aller de A vers B, on parcourt un chemin :

3 unités vers la droite et 2 unités vers le haut. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ se note $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ou $(3\,;2)$



Propriété :

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et deux points $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$.

- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$; • $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$; un réel k. • $-\vec{u}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux lorsque $x = x'$ et $y = y'$
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$
- Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\\frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}$

Exercice 01

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$, tels que :
$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.
2) Calculer les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$.
3) Déterminer les coordonnées de G tel que $ABCG$ soit un parallélogramme
4) Calculer les coordonnées de M, N et P milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

Correction

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\3-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2-(-1)\\3-(-2)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4-1\\-2-(-4)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

2) $3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\times 3\\3\times 2\end{pmatrix}$ *donc* $3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$ et $4\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\times(-1)\\4\times 5\end{pmatrix}$ *donc* $4\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\20\end{pmatrix}$

$3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}9-(-4)\\6-20\end{pmatrix}$ *donc* $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}13\\-14\end{pmatrix}$

3) $ABCG$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GC}$.

On a alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}-1-x_G\\-2-y_G\end{pmatrix}$

Donc : $-1 - x_G = 3$ et $-2 - y_G = 2$

$-x_G = 3+1$ et $-y_G = 2+2$

$x_G = -4$ et $y_G = -4.$

Les coordonnées du point G sont $(-4\,;-4)$

4) $M\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\ \frac{3+1}{2}\end{pmatrix}$ *donc* $M\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\ 2\end{pmatrix}$

$N\begin{pmatrix}\frac{2+(-1)}{2}\\ \frac{1+(-2)}{2}\end{pmatrix}$ *donc* $N\begin{pmatrix}0,5\\ -0.5\end{pmatrix}$; $P\begin{pmatrix}\frac{5+(-1)}{2}\\ \frac{3+(-2)}{2}\end{pmatrix}$ *Donc* $P\begin{pmatrix}2\\ -0.5\end{pmatrix}$

3) Distance dans un repère orthonormé

Activité

Soit A et B deux points de coordonnées $\binom{x_A}{y_A}$ et $\binom{x_B}{y_B}$ dans un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$,

Montrer que : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Propriété :

Soient deux points $A\binom{x_A}{y_A}$ et $B\binom{x_B}{y_B}$, et un vecteur $\vec{u}\binom{x}{y}$ dans un repère *orthonormé* :

- La norme de vecteur $\vec{u}\binom{x}{y}$ *est* $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$
- La distance AB (ou la norme de $\overrightarrow{AB}$) est :

$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Remarque : Cette propriété est une conséquence du théorème de Pythagore.

Exercice 02

Soit deux points $A\binom{3}{2}$ et $B\binom{2}{-2}$ dans un repère orthonormé.

Calculer la distance AB.

Correction

La distance AB (ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) est égale à :

$AB = \sqrt{(2-3)^2+(-2-2)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2+(-4)^2}$

$= \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

4) Colinéarité de deux vecteurs

a) Déterminant de deux vecteurs

Définition :

Soit deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$.

Le nombre $xy'-yx'$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note : $det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = xy'-yx'$.

b) Critère de colinéarité

Activité

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs dans le plan

a) Montrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$

b) Montrer que si $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Propriété :

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $det(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$.

Exercice 03

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\binom{-6}{10}$ et $\vec{v}\binom{9}{-15}$ b) $\vec{u}\binom{4}{9}$ et $\vec{v}\binom{11}{23}$

Correction

a) $det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix}-6 & 9\\ 10 & -15\end{vmatrix} = (-6)\times(-15) - 10\times 9 = 90-90 = 0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

b) $det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix}4 & 11\\ 9 & 23\end{vmatrix} = 4\times 23 - 9\times 11 = 92-99 = -7 \neq 0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

c) Applications

Propriétés :

1) Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2) Dire que les points A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 04

On considère les points $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$ et $E\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$.

a) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

Correction

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6-(-2)\\-1-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$.

$det(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD})=\begin{vmatrix}4 & 8\\1 & 2\end{vmatrix}=4\times 2-8\times 1=8-8=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Remarque :

On aurait pu également remarquer que les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont proportionnelles pour en déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

b) $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}3-5\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}6-5\\-1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

$det(\overrightarrow{EB}\,;\,\overrightarrow{ED})=\begin{vmatrix}-2 & 1\\2 & -1\end{vmatrix}=-2\times(-1)-2\times 1=0$

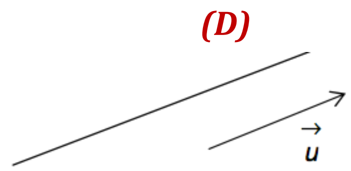
Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires. Donc les points E, B et D sont alignés.

II) DROITES DU PLAN

1) Vecteur directeur et équation cartésienne d'une droite

a) Vecteur directeur

Définition :



(D) est une droite du plan.
On appelle vecteur directeur de (D) tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite (D).

b) Équation cartésienne d'une droite

Activité

Soit $A(x_0\,;\,y_0)$ un point de la droite (D) et $\vec{u}(\alpha\,;\,\beta)$ un vecteur directeur de D.

et soit un point M(x ; y) appartient à la droite (D)

1) Déterminer les cordonnées de $\overrightarrow{AM}$

2) Montrer que M(x ; y) appartient à la droite (D) si :

$ax+by+c=0$

avec $a=\beta$ et $b=-\alpha$ et $c=\alpha y_0-\beta x_0$.

L'équation : $ax+by+c=0$ est appelé équation cartésienne du droite (D).

3) Déduire les cordonnées de vecteur $\vec{u}$ en fonction de a et b

Définition :

Toute droite admet une équation de la forme $ax+by+c=0$, avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$.
Cette équation est appelée équation cartésienne de la droite

Propriété :

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

Exemple :

Un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.

En effet, $a = 4$ et $b = -5$ donc $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.

Exercice 05

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

Correction

La droite (d) admet une équation cartésienne de la de la forme $ax + by + c = 0$.

- Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, on a : $\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Soit $a = 5$ et $b = 1$.

Une équation de d est donc de la forme $5x + 1y + c = 0$.

- Pour déterminer c, il suffit de A dans l'équation :

$5 \times 3 + 1 \times 1 + c = 0$ donc $15 + 1 + c = 0$

donc $16 + c = 0$ donc $c = -16$

Une équation de d est donc $5x + 1y - 16 = 0$.

Remarque : Une autre méthode consiste à utiliser le déterminant :

b) • B et C appartiennent à (d') donc $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de (d')

On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1-5\\-3-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Donc $a = -6$ et $b = 4$.

Une équation cartésienne de d' est de la forme : $-6x + 4y + c = 0$.

- $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ appartient à d' donc : $-6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$ donc $c = 18$.

Une équation cartésienne de (d') est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $-3x + 2y + 9 = 0$.

d) Représentation paramétrique d'une droite

Activité

Soit (D) la droite qui passe par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{U}(\alpha; \beta)$

Soit $M(x; y)$ un point de (D) ;montrer que : $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}$; $(t \in IR)$

Le système $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}$; $(t \in IR)$ est appelé représentation paramétrique de la droite (D)

a) Position relative de deux droites

Propriété :

Les deux droites sont parallèles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Exercice 06

1) Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $6x - 10y - 5 = 0$ et $-9x + 15y = 0$ sont parallèles.
2) Déterminer une représentation paramétrique de (d_1) et (d_2)

Correction

1) Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d_1).

Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-15\\-9\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d_2).

Calculons $det(\vec{u}\,;\vec{v})$:

$$det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix}10 & -15\\6 & -9\end{vmatrix} = 10 \times (-9) - 6 \times (-15) = 0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et donc (d_1) et (d_2) sont parallèles.

2) La droite (d_1) passe par le point $A(0\,;-\frac{1}{2})$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$ donc : $(d_1).\begin{cases} x = 6t \\ y = -\frac{1}{2} + 10t \end{cases}$; $(t \in IR)$

La droite (d_2) passe par le point $O(0\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-15\\-9\end{pmatrix}$ donc : $(d_2).\begin{cases} x = -15t \\ y = -9t \end{cases}$; $(t \in IR)$

2)Équation réduite et pente d'une droite

Activité

1)Montrer que si $b \neq 0$, l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite (D) peut être ramenée à une équation réduite $y = mx + p$. Avec m et p de IR

Vocabulaire : m est appelé la pente ou le coefficient directeur de la droite (D).

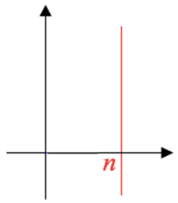
- p est appelé l'ordonnée à l'origine

2) Montrer que si $b = 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite (D) peut être ramenée à l'équation réduite : $x = n$; avec n un réel

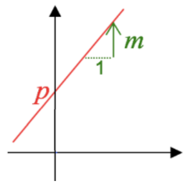
Dans ce cas, la droite D est parallèle à l'axe des ordonnées.

Propriété :

Soit une droite d.



- Si d est parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de d est de la forme $x = n$.



- Si d n'est pas parallèle à l'axe des ordonn
alors l'équation de d est de la forme $y = mx + p$.

Cette équation est appelée équation réduite de la droite d. Le nombre m et appelé la pente de droite (D)

Propriété : Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont deux points distincts d'une droite tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite a pour pente (ou coefficient directeur) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemples :

- L'équation $y = -4x + 6$ est l'équation réduite d'une droite avec : $m = -4$ et $p = 6$.
- L'équation $x = 5$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées avec : $n = 5$.

Exercice 07

a) Soit la droite d d'équation cartésienne $6x + 3y - 5 = 0$. Déterminer l'équation réduite de d.

b) Soit la droite d' d'équation cartésienne $y = 6x - 5$. Déterminer une équation catésienne de d'.

Correction

a) On veut exprimer l'équation sous la forme $y = ax + b$. Il s'agit donc d'isoler y dans l'équation.

$6x + 3y - 5 = 0$ donc $3y = -6x + 5$

$y = \frac{-6x+5}{3}$ donc $y = -2x + \frac{5}{3}$: équation réduite de (d).

b) On veut exprimer l'équation sous la forme $ax + by + c = 0$. Il s'agit donc de ramener tous les termes de l'équation dans le membre de gauche. $y = 6x - 5$

$-6x + y + 5 = 0$: équation cartésienne de d

Position relative de deux droites

Propriété : Soient deux droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

Dire que les droites sont parallèles revient à dire que leurs pentes sont égales $(m = m')$.

Remarque :

Lorsque les pentes sont différentes, les droites sont sécantes.

Exemple :

Les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $y = 3x + 4$ et $y = 3x + 9$ sont parallèles car elles ont la même pente égale à 3.

Exercice 08

Déterminer la position relative des deux droites

a) $d_1 : y = -2x - 5$ et $d_2 : y = -2x + 4$

b) $d_3 : y = 2x + 1$ et $d_4 : y = -3x + 8$

c) $d_5 : y = -x + 7$ et $d_6 : y = 3$

d) $d_7 : x = 1$ et $d_8 : x = -8$

Correction

1) Les droites d_1 et d_2 sont parallèles car elles ont la même pente égale à -2.

2) Les droites d_3 et d_4 sont sécantes car elles ont des pentes différentes 2 et -3.

3) Les droites d_5 et d_6 sont sécantes car elles ont des pentes différentes -1 et 0.

4) Les droites d_7 et d_8 sont parallèles car elles sont parallèles à l'axe des ordonnées.

Exercice 09

On considère les droites (D_m) définis par $(m-1)x - my + 2 = 0$ avec m un paramètre réels

1) Montrer que tous réel m ; $A(2;2)$ appartient à la droite (D_m)
2) Déterminer la valeur de m pour que $B(1;-2)$appartient à (D_m)
3) Déterminer une valeur de m pour que la droite (D_m) soit parallèle à la droite (Δ) d'équation : $(\Delta):\ 2x-3y+5=0$

Correction

On considère les droites (D_m) définis par $(m-1)x - my + 2 = 0$ avec m un paramètre réels

1) Montrer que tous réel m ; $A(2;2)$ appartient à la droite (D_m)

$(m-1)\times 2 - m\times 2 + 2 = 2m - 2 - 2m + 2 = 0$

Donc $A(2;2)$ appartient à la droite (D_m)

2) $B(1\,;-2)$appartient à (D_m)

Donc $(m-1)\times 1 - m\times(-2) + 2 = 0$

Donc $m - 1 + 2m + 2 = 0$; Donc $3m + 1 = 0$; Donc $m = -\frac{1}{3}$

3) Déterminer une valeur de m pour que la droite (D_m) soit parallèle à la droite (Δ) d'équation : $(\Delta):\ 2x-3y+5=0$

Un vecteur directeur de (Δ) est $\vec{u}(3\,;2)$

Un vecteur directeur de $(m-1)x - my + 2 = 0$ est $\vec{u}'(m\,;m-1)$

Donc $m = 3$

Exercice 10

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i};\vec{j})$; on considère les points $A(5\,;0)$;$B(2\,;1)$ et $C(6\,;3)$

1) a) Déterminer les cordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
   b) Calculer $det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$ et déduire que A ;B et C ne sont pas alignés
   c) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A
2) a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)
   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) Passe par A est de vecteur directeur $\vec{U}(6;-2)$
   c) Montrer que les droites (AB) et (Δ) sont parallèles
3) (D) et (D) deux droites telles que ; (D) : $\begin{cases} x = 2+5t \\ y = 1+t \end{cases}$; $(t\in IR)$ et $(D') : x + 2y + 3 = 0$
   a) Montrer que : $B\in(D)$ et $A\notin(D')$
   b) Montrer que les droites (D) et (D') sont sécantes en un point I
   c) Déterminer les coordonnées de points I

Correction

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i};\vec{j})$; on considère les points $A(5\,;0)$;$B(2\,;1)$ et $C(6\,;3)$

3) a) Déterminer les cordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(2-5;1-0)$ donc $\overrightarrow{AB}(-3;1)$

$\overrightarrow{AC}(6-5;3-0)$ donc $\overrightarrow{AC}(1;3)$

b) Calculer $det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$ et déduire que A ;B et C ne sont pas alignés

$det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\times 3 - 1\times 1 = -10 \neq 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

Donc les points A ;B et C ne sont pas alignés

c) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

$AB = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$

$AC = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$

Donc **le triangle ABC et isocèle en A**

$BC = \sqrt{(6-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20}$

$AB^2 + AC^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{10}^2 = \sqrt{10}^2 = BC^2$

Donc d' après théorème de PHITAGORE le triangle ABC est rectangle en A

4) a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

• A et B appartiennent à (AB) donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB)

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$. Donc $a = 1$ et $b = 3$.

Une équation cartésienne de (AB) est de la forme :

$x + 3y + c = 0.$

• $A\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ appartient à (AB) donc : $5 + 3 \times 0 + c = 0$ donc $c = -5$.

Une équation cartésienne de (AB) est : $x + 3y - 5 = 0$

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) Passe par A est de vecteur directeur $\overrightarrow{U}(6;-2)$

$(\Delta) : \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = -2t \end{cases} ; (t \in IR)$

c) Montrer que les droites (AB) et (Δ) sont parallèles

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB)

Et $\overrightarrow{U}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ)

$det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{U}) = \begin{vmatrix}-3 & 6\\ 1 & -2\end{vmatrix} = -3 \times (-2) - 6 \times 1 = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{U}$ sont colinéaires

Donc les droites (AB) et (Δ) sont parallèles

3) (D) et (D) deux droites telles que ; (D) : $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + t \end{cases} ; (t \in IR)$ et $(D') : x + 2y + 3 = 0$

a) Montrer que : $B \in (D)$ et $A \notin (D')$

$\begin{cases} x_B = 2 + 5t \\ y_B = 1 + t \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2 = 2 + 5t \\ 1 = 1 + t \end{cases}$ donc $\begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ *donc* $B \in (D)$

$x_A + 2y_A + 3 = 5 + 2 \times 0 + 3 = 8 \neq 0$ donc $A \notin (D')$

b) Montrer que les droites (D) et (D') sont sécantes en un point I

On a : $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D)

Et $\overrightarrow{V'}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D')

$det(\overrightarrow{V};\overrightarrow{V'}) = \begin{vmatrix}5 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 5 \times (1) - (-2) \times 1 = 7 \neq 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ ne sont pas colinéaires

Donc les droites (D) et (D) sont sont pas parallèles

D'où les droites (D) et (D') sont sécantes en un point I

c) Déterminer les coordonnées de points I

Pour déterminer les coordonnées de points I on av résoudre de système suivant (S) : $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + t \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + t \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$ *donc* $2 + 5t + 2(1 + t) + 3 = 0$

Donc $2 + 5t + 2 + 2t + 3 = 0$

Donc $7 + 7t = 0$; donc $7t = -7$

Donc $t = -1$

Donc $\begin{cases} x_I = 2 + 5 \times (-1) \\ y_I = 1 + (-1) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_I = -3 \\ y_I = 0 \end{cases}$