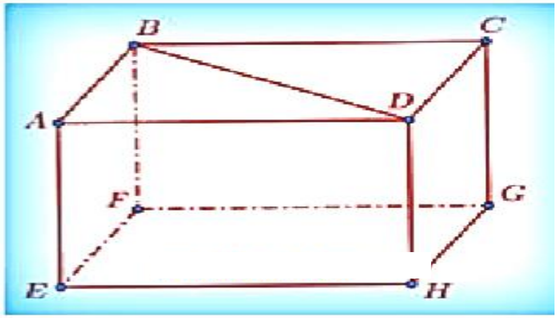
I) Approche sur les polynômes -égalité de deux polynômes

1) Définitions

Activité :

La figure ci-contre représente un parallélépipède rectangle dont les dimensions l(x) و L(x) و h(x) varient en fonction d'une variable x telles que :

$$h(x)=2x-3 \ ; \ L(x)=3x+2 \ ; \ l(x)=x-1$$



a) Remarquons que $h(x)$; $L(x)$; $l(x)$ sont des fonctions sous la forme $f(x)=ax+b$ on dit que ce sont des fonctions polynômes du premier degré.

On rappelle que leur représentations graphiques sont des droites dont l'ordonnée à l'origine est b et et dont le coefficient directeur est a.

b) soit S(x) la surface de la base et V(x) le volume du parallélépipède,

$$V(x)=S(x)\times h(x) \ ; \ S(x)=l(x)\times L(x)$$

Après calcul, on trouve : $\begin{cases} S(x)=(x-1)\times(3x+2)=3x^2-x-2 \\ V(x)=(3x^2-x-2)\times(2x-3)=6x^3-11x^2-x+6 \end{cases}$

Vocabulaire :

- L'expression $S(x)=2x^2-x-2$ est appelé polynôme de degré 2
- Nombres 2 ; -1 et -2 sont appelé les coefficients de polynôme
- L'expression $V(x)=6x^3-11x^2-x+2$ est appelé polynôme de degré 3
- Les nombres 6 ; -11 ; -1 et 2 sont les coefficients de polynôme

Définitions :

Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $a_0; a_1; a_2; \dots; a_{n-1}; a_n$ des nombres réels

Un polynôme ou fonction polynôme est une expression de la forme : $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$

- Les $a_0; a_1; a_2; \dots; a_{n-1}; a_n$ sont appelé les coefficients de polynôme
- Le polynôme P est nul si tous ses tous ses coefficients sont nuls
- Si $a_n\neq 0$ alors l'entier n est le degré de P , on écrit $d^oP=n$
- Le polynôme nul n'a pas de degré

Cas particulier :

$P(x)=ax$; $(a\neq 0)$ ce polynôme est appelé monôme de 1ère degré

$P(x)=2x^2$; $(a\neq 0)$ ce polynôme est appelé monôme de 2ème degré

$P(x)=ax+b$; $(a\neq 0)$ ce polynôme est appelé binôme de 1ère degré

$P(x)=ax^2+bx+c$; $(a\neq 0)$ ce polynôme est appelé trinôme de 1ère degré

2) Egalité de deux polynômes

Activité :

Soient P et Q deux polynômes tels que :

$P(x)=2x^2-5x+3$ et $Q(x)=ax^3+(b-1)x^2+3cx+d$

Déterminer a et b et c et d tel que $P(x)=Q(x)$

Propriété :

Soient P et Q deux polynômes tels que :

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$ et

$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_2x^2+b_1x+b_0$; Alors :

$P(x)=Q(x)$ ssi $d^oQ=d^oP$ et $a_n=b_m$; $a_{n-1}=b_{m-1}$ …… ; $a_0=b_0$

3) Somme et produit de deux polynômes

Activité :

1) Calculer $P(x)+Q(x)$ pour chaque cas

$P(x)=2x^2-3x+5$ et $Q(x)=5x^2+3x-2$

$P(x)=2x^2-3x+5$ et $Q(x)=-x^2+3x-2$

2) Calculer $P(x)\times Q(x)$ pour chaque cas

$P(x)=3x+5$ et $Q(x)=3x-2$

$P(x)=x^2+5$ et $Q(x)=-x+3$

Propriété :

- La somme de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ et un polynôme noté par $P+Q$ tel que

$(P+Q)(x)=P(x)+Q(x)$ et $d^o(P+Q)\leq sup(d^oP;d^oQ)$

- Le produit de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ et un polynôme noté par $P\times Q$ tel que

$(P\times Q)(x)=P(x)\times Q(x)$ et $d^o(P\times Q)=d^oP+d^oQ$

II) Racine d'un polynôme -division d'un polynôme par x-a

1) Racine d'un polynôme

Activité :

1) Soit P polynôme tels que : $P(x)=x^2-4x+3$

Calculer P(1) puis déterminer a et b tel que :

$$P(x)=(x-1)(ax+b)$$

On a P(1)=0 donc on dit que 1 est racine du polynôme P

2) Soit Q polynôme tels que : $Q(x)=x^3-5x+2$

Calculer Q(2) puis déterminer a et b tel que :

$$P(x)=(x-2)(ax^2+bc+c)$$

Définition : $(a\in\mathbb{R})$

On dit que a est un racine (ou zéro) d'un polynôme P(x) si et seulement si P(a)=0

2) Division d'un polynôme par x-a

Activité :

Soit P polynôme tels que : $P(x)=x^2-5$

1) Calculer P(2) puis vérifier que : $P(x)=(x-2)(x+2)+P(2)$

Le polynôme x+2 est appelé le quotient de la division euclidienne de x^2-5 par x-2

Le réel $-1=P(2)$ est appelé le reste de la division euclidienne de x^2-5 par x-2

2) Déterminer les réels a et b et c tel que : $\frac{x^2-5}{X-2}=ax+b+\frac{c}{x-2}$

Définition et propriété

Soit P(x) un polynôme de degré n $(n\in\mathbb{N})$ et $a\in\mathbb{R}$

Le polynôme P(x) s'écrit de la forme $P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$

- Le polynôme Q(x) est appelé le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par x-a
- Le réel $P(a)$ est appelé le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par x-a

Cas particulier

Si P(a)=0 on obtient $P(x)=(x-a)Q(x)$

Dans ce cas on dit

- Le polynôme P(x) est divisible par x-a
- Le polynôme P(x) est factorisé par x-a

Exercice

1) Montrer que 5 est racine du polynôme $P(x) = x^2 - 6x + 5$

2) Factorisé $P(x)$

Correction

1) Montrer que 5 est racine du polynôme $P(x) = x^2 - 6x + 5$

$P(5) = 5^2 - 6 \times 5 + 5 = 0$

Donc 5 est racine du polynôme $P(x)$

2) Factorisé $P(x)$

On a $P(5) = 0$ donc $P(x) = (x-5)(ax+b)$

Donc $P(x) = ax^2 + bx - 5ax - 5b = ax^2 + (b-5a)x - 5b$

Donc $a = 1$ *et* $b - 5a = -6$ et $-5b = 5$

Donc $a = 1$ *et* $b = -1$

Donc $P(x) = (x-5)(x-1)$

3) Méthode pour déterminer le quotient Q(x) et le reste P(a)

Soit P polynôme tels que : $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3$

Déterminer Q(x) tel que $P(x) = (x-1)Q(x) + P(1)$

1ère méthode : Factorisation par a division euclidienne

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 + x^2 - 3 & x - 1 \\ \hline
-\ 2x^3 + 2x^2 & 2x^2 + 3x + 3 \\ \hline
0 + 3x^2 - 3 & \\
-3x^2 + 3x & \\ \hline
0 + 3x - 3 & \\
-3x + 3 & \\
0 + 0 &
\end{array}$$

On obtient : $2x^3 + x^2 - 3 = (x-1)(2x^2 + 3x + 3)$

Exemple 2 : Factorisation par a division euclidienne

Soit P polynôme tels que : $P(x) = x^3 + x + 4$

Déterminer Q(x) tel que $P(x) = (x+1)Q(x) + P(-1)$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + x + 4 & x + 1 \\ \hline
x^3 + x^2 & x^2 - x + 2 \\ \hline
0 - x^2 + x + 4 & \\
-x^2 - x & \\ \hline
0 + 2x + 4 & \\
2x + 2 & \\ \hline
0 + 2 &
\end{array}$$

Donc :

$x^3 + x + 4 = (x+1)(x^2 - x + 2) + 2$

Donc $Q(x) = x^2 - x + 2$ et $P(-1) = 2$

2ème méthode : Factorisation par algorithme de HORNER :

Soit P polynôme tels que : $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3$

Déterminer Q(x) tel que $P(x) = (x-1)Q(x) + P(1)$

x^3	x^2	x	1	
2	1	0	-3	1
	2	3	3	reste=0

On obtient : $2x^3 + x^2 - 3 = (x-1)(2x^2 + 3x + 3)$