I. Résolution d'une équation-inéquation du premier degré

1) Équations du premier degré

Définition : Soient a et b de ℝ (avec $a \neq 0$)

Toute équation son écriture se ramène sous la forme $x \in \mathbb{R} \,/\, ax + b = 0$ est appelé équation du premier degré à un seul inconnu x de ℝ et ses coefficients réels a et b

Exercice 01

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $-5x + 3 = -3x + 2$ b) $3(x+4) = -(x+5) + 2$

Correction

1) $-5x + 3 = -3x + 2$

$-5x + 3x = 2 - 3$

$-2x = -1$

$x = \frac{-1}{-2}$

$x = \frac{1}{2}$

On note : $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) $3(x+4) = -(x+5) + 2$

$3x + 12 = -x - 5 + 2$

$3x + x = -12 - 5 + 2$

$4x = -15$

$x = -\frac{15}{4}$

On note : $S = \left\{-\frac{15}{4}\right\}$

2) Équation-produit

Propriété : Si $A \times B = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 02

Résoudre dans ℝ les équations suivantes : a) $(4x+6)(3-7x) = 0$

b) $(3x+1)(1-6x) - (3x+7)(3x+1) = 0$ c) $5x^2 - 4x = 0$

Correction

a) $(4x+6)(3-7x) = 0$

Soit : $4x + 6 = 0$ ou $3 - 7x = 0$

$4x = -6$ $\quad -7x = -3$

$x = -\frac{6}{4}$ $\quad x = \frac{-3}{-7}$

$x = -\frac{3}{2}$ $\quad x = \frac{3}{7}$

L'équation a deux solutions : $-\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{7}$.

On note : $S = \left\{-\frac{3}{2} \,;\, \frac{3}{7}\right\}$.

b) On commence par factoriser l'expression pour se ramener à une équation-produit :

$(3x+1)(1-6x) - (3x+7)(3x+1) = 0$

$(3x+1)[(1-6x) - (3x+7)] = 0$

$(3x+1)(1-6x-3x-7) = 0$

$(3x+1)(-9x-6) = 0$

Soit : $3x + 1 = 0$ ou $-9x - 6 = 0$

$3x = -1$ ou $-9x = 6$

$x = -\frac{1}{3}$ ou $x = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$

L'équation a deux solutions : $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

On note : $S = \left\{-\frac{2}{3} \,;\, -\frac{1}{3}\right\}$.

c) $5x^2 - 4x = 0$

$x(5x-4) = 0$

Soit : $x = 0$ ou $5x - 4 = 0$

$5x = 4$

$x = \frac{4}{5}$

L'équation a deux solutions : 0 et $\frac{4}{5}$.

On note : $S = \left\{0 \,;\, \frac{4}{5}\right\}$.

3) Équation de la forme $x^2 = a$

Propriété : Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a.

Si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.

Si $a = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.

Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Exercice 03

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $x^2 = 16$ b) $x^2 = -8$ c) $(x+2)^2 = 9$.

Correction

a) L'équation $x^2 = 16$ possède deux solutions : $x = -\sqrt{16} = -4$ et $x = \sqrt{16} = 4$.

On note : $S = \{-4\ ;\ 4\}$.

b) L'équation $x^2 = -8$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car -8 est négatif. Donc $S = \emptyset$.

c) L'équation $(x+2)^2 = 9$ possède deux solutions :

$x + 2 = -\sqrt{9}$ et $x + 2 = \sqrt{9}$

Soit : $x = -3 - 2 = -5$ et $x = 3 - 2 = 1$

L'équation a deux solutions : -5 et 1.

On note : $S = \{-5\ ;\ 1\}$.

4) Équation-quotient

Propriété : Si $\frac{A}{B} = 0$ alors $A = 0$ et $B \neq 0$.

Exemple : L'équation $\frac{x+2}{x+3} = 0$ a pour solution $x = -2$.

Exercice 04

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ b) $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$ c) $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$

Correction

a) L'équation $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ est définit pour $x \neq -3$

Pour $x \neq -3$, l'équation $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$ équivaut à :

$x^2 - 9 = 0$, soit $x^2 = 9$

Soit encore : $x = -\sqrt{9} = -3$ ou $x = \sqrt{9} = 3$.

Comme $x \neq -3$, l'équation a pour unique solution : $x = 3$.

On note : $S = \{3\}$.

b) L'équation $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$ est définit pour $x \neq 3$

Pour $x \neq 3$, l'équation $\frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{x-3}$ équivaut à : $\frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{x-3} = 0$.

$\frac{x+3-2}{x-3} = 0$ donc $\frac{x+1}{x-3} = 0$

Pour $x \neq 3$, l'équation équivaut à $x + 1 = 0$.

D'où $x = -1$.

On note : $S = \{-1\}$.

c) L'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ n'est pas définie pour $x = 2$ et $x = 3$.

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$,

l'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ équivaut à : $1 - \frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{2-x} = 0$

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$$\frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{2(x-3)}{(2-x)(x-3)} = 0$$

$$\frac{(x-3)(2-x)-(x+3)(2-x)-2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$$

On développe et on réduit le numérateur :

$$\frac{2x-x^2-6+3x-2x+x^2-6+3x-2x+6}{(x-3)(2-x)} = 0$$

$$\frac{4x-6}{(x-3)(2-x)} = 0$$

Ce qui équivaut à $4x - 6 = 0$.

D'où $x = \frac{3}{2}$.

On note : $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

6) Le signe de $f(x) = ax + b$ tel que $a \neq 0$

Propriété :

Le tableau de signe de $f(x) = ax + b$ tel que $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad -\frac{b}{a} \qquad$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de $-a$ 0 Signe de a

Démonstration : Si $a > 0$

$f(x) \geq 0$ *donc* $ax + b \geq 0$ donc $x \geq -\frac{b}{a}$ donc $x \in \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right[$

$f(x) \leq 0$ *donc* $ax + b \leq 0$ donc $x \leq -\frac{b}{a}$ donc $x \in \left]-\infty; -\frac{b}{a}\right]$

- Si $a < 0$

$f(x) \geq 0$ *donc* $ax + b \geq 0$ donc $x \leq -\frac{b}{a}$ donc $x \in \left]-\infty; -\frac{b}{a}\right]$

$f(x) \leq 0$ *donc* $ax + b \leq 0$ donc $x \geq -\frac{b}{a}$ donc $x \in \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right[$

Exercice 05

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivantes : $(I): (2x + 8)(2 - x) \leq 0$

Correction

$(I): (2x + 8)(2 - x) \leq 0$

$(2x + 8)(2 - x) = 0$ donc $x = -4$ *ou* $x = 2$

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$2x + 8$		$-$	0	$+$		$+$	
$2 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x + 8)(2 - x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $S =]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[$

6) Équation-Inéquations -valeur absolus

Propriété : Soit r un réel positif

1) Si $|x| = r$ alors $x = r$ ou $x = -r$
2) Si $|x| = |y|$ alors $x = y$ ou $x = -y$
3) $|x| \leq r$ ssi $-r \leq x \leq r$
c.à.d : $x \in [-r; r]$.
4) $|x| \geq r$ ssi $(x \leq -r$ ou $x \geq r)$,
c.à.d : $x \in]-\infty; -r] \cup [r; +\infty[$;

Exercice 06

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1): |2x + 8| = 2$; $(E_2): |2x - 8| = |3x - 6|$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(I_1): |2x - 8| < 2$; $(I_2): |-3x + 6| \geq 2$

Correction

$|2x + 8| = 2$ donc $2x + 8 = 2$ ou $2x + 8 = -2$

c.à.d $2x = 2 - 8$ ou $2x = -2 - 8$

c.à.d $2x = -6$ ou $2x = -10$

c.à.d $x = -\frac{6}{2}$ ou $x = -\frac{10}{2}$

ssi $x = -3$ ou $x = -5$

Donc : $S = \{-3; -5\}$

$(E_2): |2x - 8| = |3x - 6|$

$|2x - 8| = |3x - 6|$

si $2x - 8 = -3 - 6$ ou $2x - 8 = -(3x - 6)$

ssi $2x = -6$ ou $2x = -10$

ssi $x = -\frac{6}{2}$ ou $x = -\frac{10}{2}$

ssi $x = -3$ ou $x = -5$

Donc : $S = \{-3; -5\}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$|2x - 8| < 2$ ssi $-2 < 2x - 8 < 2$

ssi $6 < 2x < 10$

ssi $3 < x < 5$

Donc : $S =]3; 5[$

$|-3x + 6| \geq 2$ donc $(-3x + 6 \leq -2$ ou $-3x + 6 \geq 2)$

donc $(-3x \leq -8$ ou $-3x \geq -4)$ donc $(3x \geq 8$ ou $3x \leq 4)$

DONC $\left(x \geq \frac{8}{3}\right.$ ou $\left.x \leq \frac{4}{3}\right)$ c.à.d : $x \in \left[\frac{8}{3}; +\infty\right[$ ou $x \in \left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$

Donc : $S = \left]-\infty; \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{8}{3}; +\infty\right[$

II. Résolution d'une équation-inéquation du second degré

Définition :

Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple :

L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Activité

1) Vérifier que : $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire sous forme :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = 0 \qquad ; \textit{On pose : } \Delta = b^2 - 4ac$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$

Solution

1) Vérifier que : $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire sous forme

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c = 0$$

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = 0$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c = 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = 0$$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

car a est non nul.

- Si $\Delta < 0$: Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2} < 0\right)$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

L'équation n'a qu'une seule solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à :

$$x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'équation a deux solutions distinctes sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ou \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Définition :

On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété :

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exercice 07

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$

c) $x^2 + 3x + 10 = 0$

Solution

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:

$a = 2$, $b = -1$ et $c = -6$

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} = 2$$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation donc $S = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$:

$a = 2$, $b = -3$ et $c = \frac{9}{8}$

Donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:

$a = 1$, $b = 3$ et $c = 10$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Propriété :

La somme S et le produit P des solutions d'une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont donnés par : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Activité :

Démontrer ces deux formules.

Solution

$$On\ a : \quad x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ou \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\begin{aligned}
S &= x_1 + x_2 \\
&= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} \\
&= \frac{-b}{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= x_1 \times x_2 \\
&= \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= \frac{(-b)^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} \\
&= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

2). Factorisation d'un trinôme

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Remarque : Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

Démonstration

$f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Si $\Delta < 0$: Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2} < 0\right)$,
il n'existe pas de forme factorisée de f.

Si $\Delta = 0$: $f(x) = ax^2 + bx + c$, peut s'écrire : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Si $\Delta > 0$: $f(x) = ax^2 + bx + c$. est équivalente à :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}^{\,2}\right]$$

$$f(x) = a\left[(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a})\right]$$

$$f(x) = a[(x - x_1)(x - x_2)]$$

Exercice 08

Factoriser les trinômes suivants :

a) $4x^2 + 19x - 5$ b) $9x^2 - 6x + 1$

Solution

a) On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les racines sont : $x_1 = \frac{-19-\sqrt{441}}{2\times4} = -5$ et $x_2 = \frac{-19+\sqrt{441}}{2\times4} = \frac{1}{4}$

On a donc : $4x^2 + 19x - 5 = 4(x - (-5))\left(x - \frac{1}{4}\right) = (x + 5)(4x - 1)$.

b) On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

La racine (double) est : $x_0 = -\frac{-6}{2\times9} = \frac{1}{3}$

On a donc : $9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = (3x - 1)^2$.

Exercice 09

a) Déterminer les fonctions f du second degré s'annulant en -3 et 5

b) En déduire l'expression de f sous sa forme factorisée telle que $f(-1) = 3$.

Solution

a) Si une fonction polynôme du second degré s'annule en -3 et 5, cela signifie que -3 et 5 sont les racines du polynôme et donc f est sous la forme :

$f(x) = a(x - (-3))(x - 5) = a(x + 3)(x - 5)$, avec a réel non nul.

b) On a : $f(-1) = 3$ donc $a(-1 + 3)(-1 - 5) = 3$

$a \times 2 \times (-6) = 3$ donc $-12a = 3$

$$a = \frac{3}{-12} = -\frac{1}{4}$$

On en déduit l'expression de f sous sa forme factorisée :

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x + 3)(x - 5)$$

Exercice 10

Résoudre dans ℝ l'équation (E) : $\frac{x-2}{2x^2-3x-2} - \frac{x^2}{2x^2+13x+6} = 0$

Solution

On commence par factoriser les expressions $2x^2 - 3x - 2$ et $2x^2 + 13x + 6$.

Le discriminant de $2x^2 - 3x - 2$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ et ses racines sont :

$x_1 = \frac{3-\sqrt{25}}{2\times2} = \frac{-1}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{25}}{2\times2} = 2$

On a donc : $2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-2) = (2x+1)(x-2)$. .

Le discriminant de $2x^2 + 13x + 6$ est $\Delta' = 13^2 - 4 \times 2 \times 6 = 121$ et ses racines sont :

$x_1' = \frac{-13-\sqrt{121}}{2\times2} = -6$ et $x_2' = \frac{-13+\sqrt{121}}{2\times2} = \frac{-1}{2}$

On a donc : $2x^2 + 13x + 6 = 2(x+6)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x+6)(2x+1)$

- L'équation (E) s'écrit alors :

$\frac{x-2}{(2x+1)(x-2)} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0$

Les valeurs -6, $\frac{-1}{2}$ et 2 annulent les dénominateurs.

On résout alors (E) sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-6 ; -\frac{1}{2} ; 2\right\}$:

(E) s'écrit : $\frac{1}{2x+1} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0$

$\frac{x+6}{(2x+1)(x+6)} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0$

$\frac{x+6-x^2}{(2x+1)(x+6)} = 0$

$x + 6 - x^2 = 0$ car $x \neq -\frac{1}{2}$ et $x \neq -6$.

Le discriminant de $-x^2 + x + 6$ est $\Delta'' = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25$.

Les racines sont : $x_1'' = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = 3$ et $x_2'' = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = -2$

Les solutions de l'équation (E) sont : -2 et 3.

3). Signe d'un trinôme

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur ℝ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a

Exercice 11

Résoudre dans ℝ l'inéquation (I): $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

Solution

- Le discriminant de $x^2 - 4x + 3$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{4}}{2\times1} = 1 \quad \text{et } x_2 = \frac{4+\sqrt{4}}{2\times1} = 3$$

- On obtient le tableau de signes de $f(x) = x^2 - 4x + 3$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

- On déduit l'ensemble des solutions de (I): $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$$S =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[.$$

Exercice 12

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$

Solution

$x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ équivaut à $x^2 + 4x - 7 < 0$.

Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{44}}{2\times1} = -2 - \sqrt{11}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{44}}{2\times1} = -2 + \sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes de $f(x) = x^2 + 4x - 7$:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc $]-2-\sqrt{11} ; -2+\sqrt{11}[$.

Donc $S =]-2-\sqrt{11} ; -2+\sqrt{11}[$

2) $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ équivaut à $\frac{1}{x^2-x-6} - 2 \geq 0$

Donc $\frac{1}{x^2-x-6} - \frac{2(x^2-x-6)}{x^2-x-6} \geq 0$; Donc $\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0$

On commence par déterminer les racines du trinôme $x^2 - x - 6$:

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ et ses racines sont :

$x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2\times1} = -2$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2\times1} = 3$

Les valeurs -2 et 3 annulent le dénominateur.

On résout donc l'équation dans $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 3\}$.

On détermine les racines du trinôme $-2x^2 + 2x + 13$:

Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont

$x_1' = \frac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2' = \frac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		−	0	+		+		+	0	−	
x^2-x-6		+		+	0	−	0	+		+	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		−	0	+	‖	−	‖	+	0	−	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ est :

$$S = \left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2} ; -2\right[\cup \left]3 ; \frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$$

III) Equations et inéquations de 1ère degré à deux inconnues :

Activité :

1) Considérons l'équation : $(E) : (x ; y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x + 5y = 10$

a) Vérifier que le couple (0 ;2) est solution de l'équation (E)

b) Est-ce que le couple (2 ;0) est solution de l'éaution(E)

c) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation (E)

2) Considérons dans le plan (D) l'ensemble des point $M(x ; y)$ *tel que* ; $2x + 5y = 10$

Tracer l'ensemble (D) dans un repère orthonormé

Noté sur la figure le demi plan (P_1) de bord la droite (D) qui contient le point O(0 ;0) et l'autre demi plan sera noté (P_2)

3) Considérons l'inéquation : $(I) : (x ; y) \in \mathbb{R}^2 ; 2x + 5y \leq 10$

a) Prendre plusieurs points quelconque de (P_1) puis vérifier si leurs cordonnées (x ;y) vérifie l' l'inéquation : (I)

b) Prendre plusieurs points quelconque de (P_2) puis vérifier si leurs cordonnées (x ;y) vérifie l' l'inéquation : (I)

c) Résoudre graphiquement l'inéquation (I)

Solution :

1) **Considérons l'équation :** $(E) : (x\,;y) \in \mathbb{R}^2\,;2x+5y=10$

a) Pour x=0 et y=2 l'équation est vérifiée donc le couple (0 ;2) est solution de l'équation

b) Par exemple le couple (2 ;0) n'est pas une solution de (E)

c) Pour trouver tous les couples qui vérifie (E) on cherche x en fonction de y ou bien y en fonction de x

Donc le couple (x ;y) est solution de (E) revient à dire que

$x=\frac{10-5y}{2}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est $S=\left\{\left(\frac{10-5y}{2}\,;y\right);y\in\mathbb{R}\right\}$

2) **Considérons dans le plan l'ensemble des point $M(x\,;y)$ tel que $;2x+5y=10$**

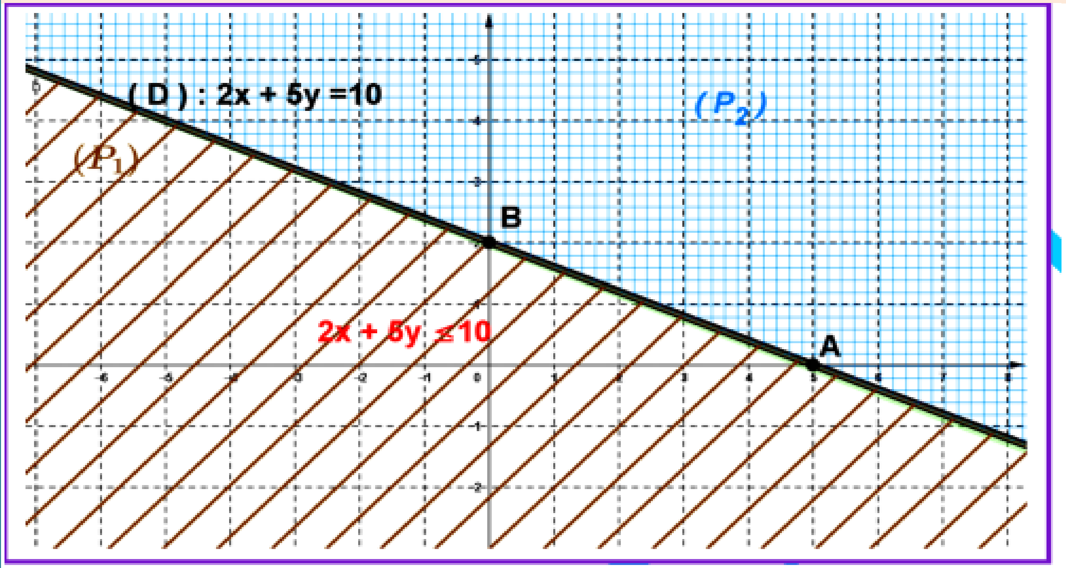
Donc l'ensemble est la droite (D) d'équation cartésienne

$$2x+5y=10$$

Pour tracer la droite (D) on cherche deux points A et B de (D)

Par exemple A(5 ;0) et B(0 ;2) appartient à (D)

Noté sur la figure le demi plan (P_1) de bord la droite (D) qui contient le point O(0 ;0) et l'autre demi plan sera noté (P_2)



3) Considérons l'inéquation : $(I) : (x\,;y)\in\mathbb{R}^2\,;2x+5y\le 10$

a) **Prendre plusieurs points quelconque de (P_1) puis vérifier si leurs cordonnées (x ;y) vérifie l' l'inéquation : (I)**

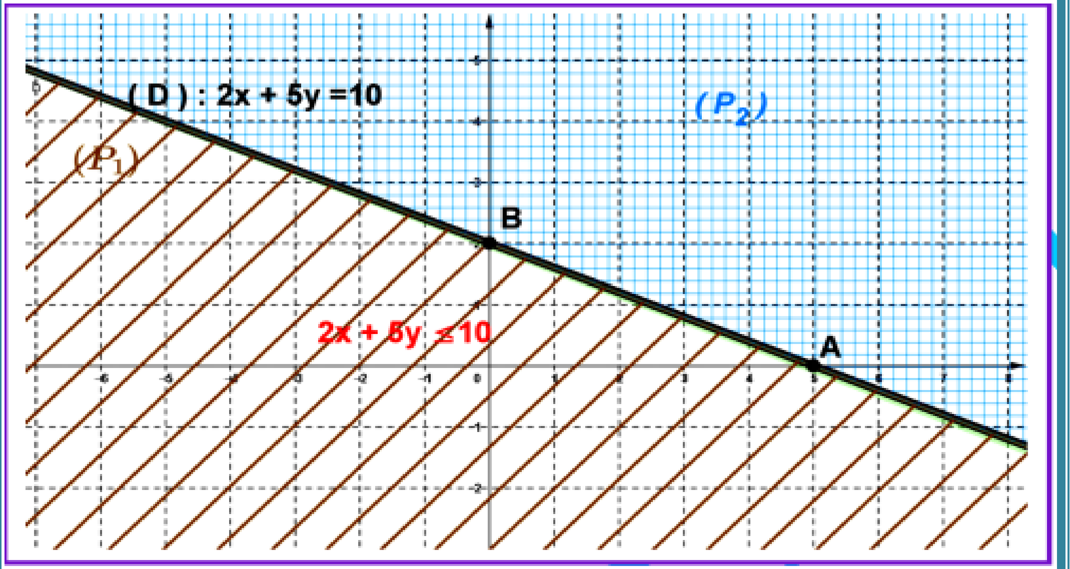
Par exemple les points O ; A ; B et C(1 ;1) ……. de demi plan (P_1) leurs cordonnées vérifie l'inéquation : (I)

b) **Prendre plusieurs points quelconque de (P_2) puis vérifier si leurs cordonnées (x ;y) vérifie l' l'inéquation : (I)**

Par exemple les points D(0 ;3) ; E(3 ;3) et F(4 ;10) ……. de demi plan (P_2) leurs cordonnées ne vérifie pas l'inéquation : (I)

c) **Résoudre graphiquement l'inéquation (I)**

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est le demi plan (P_1) fermé c-est-dire qui contient la droite (D) (Voir la figure)



IV) Système de deux équations de premier degré à deux inconnues

1) Méthode de substitution

Exercice 13

Résoudre le système d'équations par la méthode de substitution

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$$

Solution

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

On isole facilement l'inconnue x dans la 2^{e} équation.

$$\begin{cases} 3(14 + 4y) + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

On remplace x par $14 + 4y$ dans la 1re équation (substitution).

$$\begin{cases} 42 + 12y + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14y = -42 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{42}{14} = -3 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 14 + 4 \times (-3) \end{cases}$$

On remplace y par -3 dans la 2^{e} équation.

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

La solution du système est le couple $(2\,;-3)$ et on note :

$$S = \{(2\,;-3)\}$$

2) Méthode des combinaisons linéaires

Exercice 14

Résoudre les systèmes d'équations par la méthode des combinaisons linéaires : $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

Solution

- $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases} \quad \times 2$$

On multiplie la 1re équation par 2…

$$\begin{cases} 6x - 4y = 22 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$

… pour obtenir le même coefficient devant une des inconnues.

$$-\begin{cases} 6x - 4y = 22 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$

$$6x - 6x - 4y - 3y = 22 - 15$$

$$-4y - 3y = 22 - 15$$

$$-7y = 7$$

$$y = \frac{7}{-7}$$

$$y = -1$$

On remplace y par -1 dans une des deux équations (au choix).

Par exemple dans $3x - 2y = 11$

$3x - 2 \times (-1) = 11$

$3x + 2 = 11$

$3x = 11 - 2$

$3x = 9$

$x = 3$

La solution du système est le couple $(3\,;-1)$ et on note :

$$S = \{(3\,;\,-1)\}$$

3) Méthode de GRAMER

Définition et théorème :

Soient a ;b ;c ;a' ;b ' et c' des nombres réels

On considère le système (S); $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Le nombre $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ est appelé le déterminant du système (S)

Le nombre $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$ est appelé le déterminant pour déterminer x

Le nombre $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$ est appelé le déterminant pour déterminer y

- Si $\Delta \neq 0$ alors le système est appelé système de GRAMER

Le système admet une unique solution c'est le couple $(\frac{\Delta_x}{\Delta}\,;\frac{\Delta_y}{\Delta})$

Donc l'ensemble des solutions de (S) est

$$S = \left\{\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}\,;\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)\right\}$$

- Si $\Delta = 0$

Cas 01 : Si $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$

Le système n'admet pas des solutions

Donc l'ensemble des solutions de (S) est $S = \phi$

Cas 02 : Si $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$

Le système se ramène à une seule équation

$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ équivaut à $ax+by=c$

Donc c'est une équation à deux inconnus qui a une infinité des solutions ; d'où l'ensemble des solutions de (S) est :

$S = \left\{(x\,;y): x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}\right\}$ si $a \neq 0$ ou $S = \left\{(x\,;y): y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right\}$ si $b \neq 0$

Exercice 15

Résoudre les systèmes par la méthode des déterminants :

(S_1): $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ 6x+3y=15 \end{cases}$ (S_2): $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x+4y=1 \end{cases}$ (S_3): $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -6x+4y=-2 \end{cases}$

Solution

(S_1): $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ 6x+3y=15 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 12 = 21$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} = 33 + 30 = 63$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 45 - 66 = -21$

On a $\Delta \neq 0$ donc $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{63}{21} = 3$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-21}{21} = -1$

Donc l'ensemble des solutions de (S) est $S = \{(3\,;-1)\}$

(S_2): $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x+4y=1 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$

On a $\Delta = 0$ *et* $\Delta_x \neq 0$

Donc l'ensemble des solutions de (S) est $S = \phi$

(S_3): $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -6x+4y=-2 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$

Donc $\Delta = 0$ *et* $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$, donc le système est équivaut à l'équation $3x - 2y = 1$ donc $x = \frac{1+2y}{3}$, donc $S = \left\{(x\,;y): x = \frac{1+2y}{3}\right\}$