A) Fonctions numériques d'une variable réelle

1) Généralités

Toute relation f qui associe chaque élément x de $\mathbb{R}$ par un élément au plus y de $\mathbb{R}$, est dite une fonction numérique à variable réel x

- L'élément x et est appelée antécédent
- L'élément y est appelée l'image de x, on le note par $f(x)$
- On résume ce qui précède par : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = y$$

Exercice 01

1) Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 + 4$.
Calculer l'image de 5 par la fonction g.
2) Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$.
Déterminer un antécédent de -5 par la fonction f.

Correction

1) Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 + 4$.
Calculer l'image de 5 par la fonction g.

$g(x) = x^2 + 4$

$g(5) = 5^2 + 4$

$g(6) = 25 + 4$

$g(6) = 29$

L'image de 6 par la fonction g est 34.

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x + 3$.
Déterminer un antécédent de -5 par la fonction f.

On cherche un antécédent de 5 donc 5 est une image.

On peut donc écrire : $f(x) = 5$

Soit : $2x + 3 = 5$

On résout ainsi l'équation :

$2x = -3 + 5$

$2x = 2$ donc $x = 1$

L'antécédent de 5 par f est donc 1.

2) Ensemble de définition

Définition :

L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble des éléments ayant une image par f ; noté D ou D_f.

Remarque :

L'ensemble de définition D_f est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Exemples :

1) $\mathbb{R}$ est l'ensemble de définition de toute fonction polynôme.
2) $\mathbb{R}$ est le domaine de définition des fonctions cos et sin.
3) $[0\,;+\infty[$ est le domaine de définition de la fonction racine carrée :$x \mapsto \sqrt{x}$.
4) Soient f une fonction tel que $f(x) = \sqrt{3 - x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3 - x \geq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}: \ x \leq 3\}$

$=]-\infty; 3]$

5) Soient f une fonction tel que $f(x) = \frac{-2x-4}{x^2-4}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 4 \neq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}/ \ x \neq -2 \ \text{ et } x \neq 2\}$

$= \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$=]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$

Exercice 02

Déterminer D_f l'ensemble de définition des fonctions suivantes

1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; 2) $f(x) = \frac{-2x-4}{8-4x}$

3) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4}$; 4) $f(x) = \sqrt{6 - 2x}$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$; 6) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

7) $f(x) = \frac{2x-4}{|8-4x|-1}$; 8) $f(x) = \frac{-2x-4}{\cos x - 1}$

3) Représentation graphique d'une fonction

Activité :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

On donne un tableau de valeurs de la fonction f :

x	0	1	2	-1	-2
$f(x)$	0	1	4	1	4

Tracer, dans un repère, les points $(x\,;f(x))$ puis relier ses points

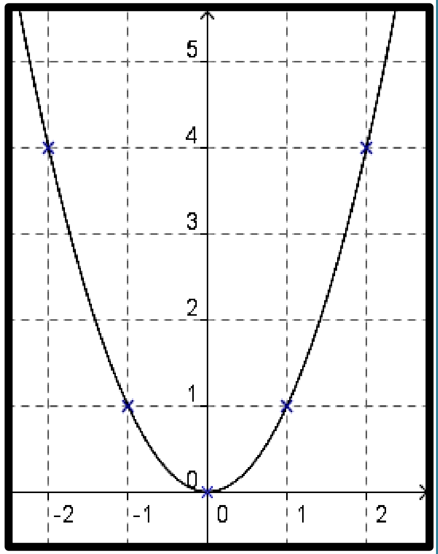
Correction

On représente les données du tableau de valeurs dans un repère tel qu'on trouve en abscisse les valeurs de x et en ordonnée les valeurs de $f(x)$ correspondantes.

En reliant les points, on obtient une courbe.

Tout point de la courbe possède donc des coordonnées de la forme $(x\,;f(x))$.

Les images $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées (Oy)



Exercice 03

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2$

Vérifier que le point de coordonnées $(-2\,;2)$ appartient à la courbe de f.

Correction

Point de coordonnées $(-2\,;\,2)$ appartient à la courbe si $f(-2) = 7$

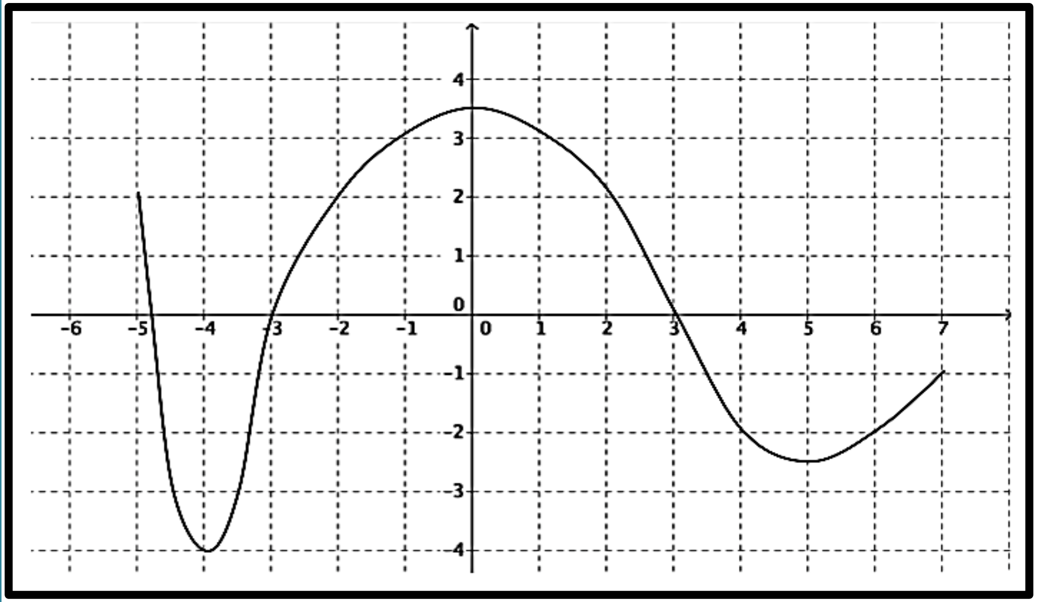
$f\,(-2) = \,(-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

Donc le point de coordonnées $(-2\,;\,7)$ appartient à la courbe de f.

Exercice 04

Lecture graphique d'une image et d'un antécédent

Soit f une fonction définit par son graphe en dessous :



Déterminer graphiquement :

1) L'ensemble de définition de la fonction f

3) L'image de -5 ; -4 ; -3 ; 3 et 4 par la fonction f.

3) Les antécédents de 2 par la fonction f.

Correction

1) L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[-5;7]$

2) L'image de $-5\,;\,-4\,;\,-3\,;\,3\;et\;4$ et par la fonction f.

$f(-5) = 2$

$f(-4) = -4$

$f(-3) = 0$

$f(4) = -2$

3) Les antécédents de 2 par la fonction f sont $-2\,;\,2\,;$

4) Parité d'une fonction

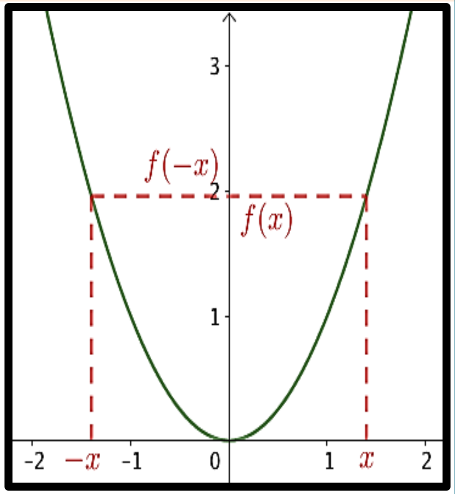
a) Fonction paire

Définition

Soit f une fonction définie sur D_f

On dit que f est paire ssi

$$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in D_f : -x \in D_f \\ \text{Pour tout } x \in D_f \, ; f(-x) = f(x) \end{cases}$$



Théorème 01

Dans un repère orthonormé , la courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Exemple :

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 1$ est paire.

L'ensemble de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$

Et $f(-x) = 3(-x)^2 + 1 = 3x^2 + 1$

Donc $f(-x) = f(x)$

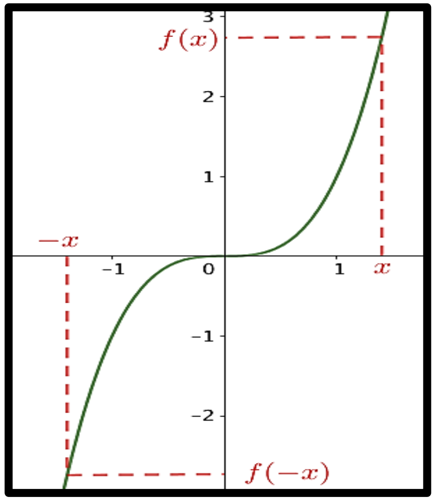
D'où La fonction f est donc paire.

b) Fonction impaire

Définition

On dit que f est impaire ssi

$$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in D_f : -x \in D_f \\ \text{Pour tout } x \in D_f : f(-x) = -f(x) \end{cases}$$



Théorème 01 : Dans un repère orthonormé , la courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère

Remarque : Si f est paire ou impaire alors on peut réduire son étude à $IR^+ \cap D$.

Exemple :

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 3x^3$ est impaire.

L'ensemble de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$

Et $f(-x) = 3(-x)^3 = -3x^3$

Donc $f(-x) = -f(x)$

D'où La fonction f est donc impaire.

Exercice 05

Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes :

$f(x) = x^2 + 2$; $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$; $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

Solution

$$1)\ f(x) = x^2 + 2$$

- **L'ensemble de définition de f**

La fonction f est un polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

- **La parité de la fonction f**

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $-x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + 2 \\ &= x^2 + 2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction f est paire

$$2)\ f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

- **L'ensemble de définition de f**

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x^2 \geq 0$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x^2 + 1 \geq 1$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x^2 + 1 \neq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

➢ **La parité de la fonction f**

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $-x \in \mathbb{R}$

Et on a :

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{2x^2}{x^2+1} = f(x)$$

Donc la fonction f est paire

$$3)\quad f(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

➢ **L'ensemble de définition de f**

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\}$

$x^2 - 4 \neq 0 \ donc \ x^2 \neq 4$

$donc \ x \neq \sqrt{4} \ et \ x \neq -\sqrt{4}$

$donc \ x \neq 2 \ et \ x \neq -2$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{-2;2\}$

$=]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$

➢ **La parité de la fonction f**

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-2\,;2\}$

$donc \ x \neq 2 \ et \ x \neq -2$

$donc \ -x \neq -2 \ et \ -x \neq 2$

Donc $-x \in \mathbb{R} - \{-2\,;2\}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$* \ f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-4} = -\frac{x}{x^2-4} = -f(x)$$

Donc la fonction f est impaire

B) Sens de variations d'une fonction

1) Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- **La fonction f est croissante sur I si :**

  $Pour\ tout\ a;b \in I: a > b$ **on a** $f(a) \geq f(b)$.

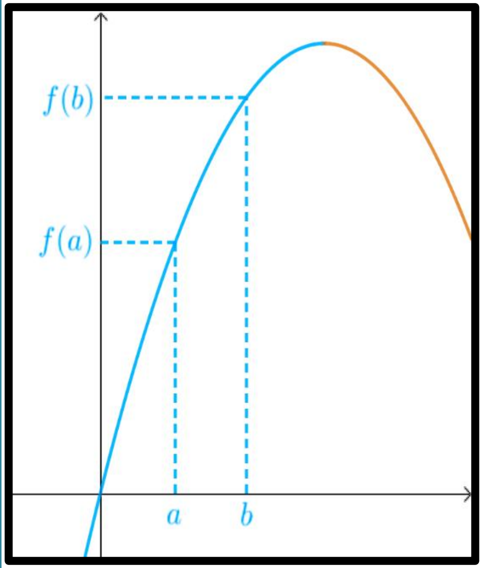
- **La fonction f est décroissante sur I si :**

  $Pour\ tout\ a;b \in I\ a > b$ **on a** $f(a) \leq f(b)$.

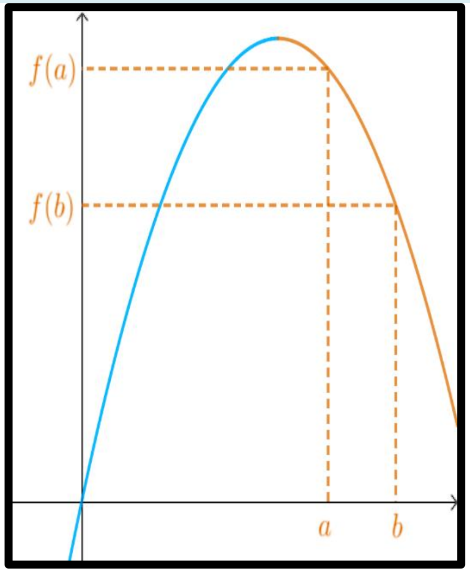
- **La fonction f est constante sur I si :**

  $Pour\ tout\ a;b \in I : a \neq b$ **on a** $f(a) = f(b)$.

- **La fonction est monotone sur l'intervalle I si la fonction est croissante ou décroissante sur I.**



La fonction f est croissante



la fonction f est décroissante

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -4x + 1$

Etudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

Soient $a;b \in I$ **tels que** $a > b$

$a > b \ donc \ -4a < -4b$

$Donc \ -4a + 1 < -4b + 1$

$Donc \ f(x) < f(b)$

Donc la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$

Remarque :

Pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle I, on calcule T le taux de variations :

$$T = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \; avec \; x \neq y.$$

- **Si T>0 alors f est strictement croissante**
  (T$\geq$ 0 alors f est croissante).
- **Si T<0 alors f est strictement décroissante**
  (T$\leq$ 0 $alors\ f\ est\ décroissante$)
- **Si T=0 pour tout x et y de I alors f est constante.**

Exemple :

Soit f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$

Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

Soient x et x deux réels $avec\ x \neq y$

$$T = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{x^2-y^2}{x-y} = x+y$$

Si $x; y \in [0; +\infty[$ on a : $T \geq 0$

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$

Si $x; y \in]-\infty; 0]$on a : $T \leq 0$

Donc f est décroissante sur$]-\infty; 0]$

On résume les variations de f dans un tableau appelé tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 1$

1) **Calculer le taux de variation de f sur $\mathbb{R}$**
2) **Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[2; +\infty[$**
3) **Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty; 2]$**
4) **Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$**

3)Extrémums d'une fonction numérique :

Définition :

Soient f une fonction définie sur D_f

et a un réel tel que $a \in D_f$

- **On dit que le nombre $f(a)$ est valeur minimale de f sur D_f ssi**

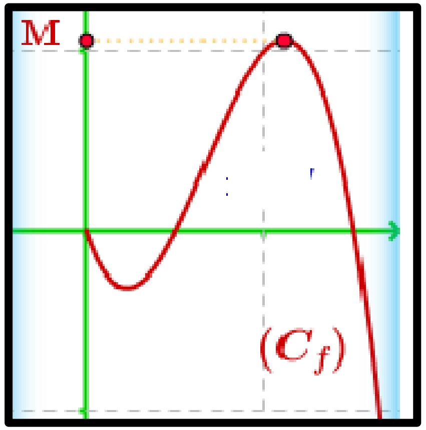
$$\left(Pour\ tout\ x \in D_f\right): f(a) \leq f(x)$$

- **On dit que le nombre $f(a)$ est valeur maximale de f sur D_f ssi**

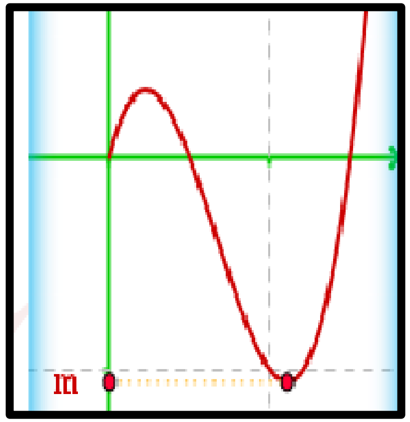
$$\left(Pour\ toutx \in D_f\right): f(x) \leq f(a)$$

Interprétation graphique :

le réel M le maximum de f



le réel m le minimum de f



Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -4x^2$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$f(x) \leq 0$ et $0 = f(0)$

Donc le nombre $0 = f(0)$ est valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$

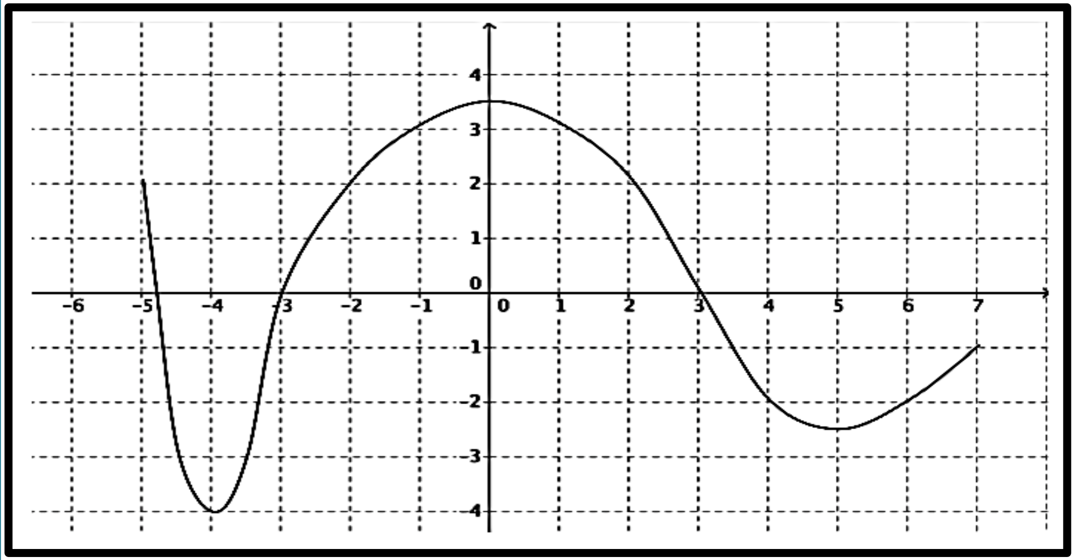
Exercice 07

1) **Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 1$**
Montrer que f -3 est minimum de f sur $\mathbb{R}$

2) **Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par : g$(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$**
Montrer que g admet un maximum en 1 sur $\mathbb{R}$

Exercice 08

On considère la représentation graphique la fonction f :



1) Sur quel intervalle la fonction f est-elle définie ?
2) Donner les variations de la fonction.
3) Donner les extremums de la fonction en précisant où ils sont atteints.
4) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations

Correction

1) La fonction f est définie sur $[-5\ ;\ 7]$.
2) La fonction f est croissante sur les intervalles $[-4\ ;\ 0]$ et $[5\ ;\ 7]$. Elle est décroissante sur les intervalles $[-5\ ;\ -4]$ et $[0\ ;\ 5]$.
3) Le maximum de f est $3,5$. Il est atteint en $x = 0$.
Le minimum de f est -4. Il est atteint en $x = -4$.
4)

x	-5		-4		0		5		7
$f(x)$	2	↘	-4	↗	3,5	↘	-2,5	↗	-1

2) la monotonie et la parité d'une fonctions

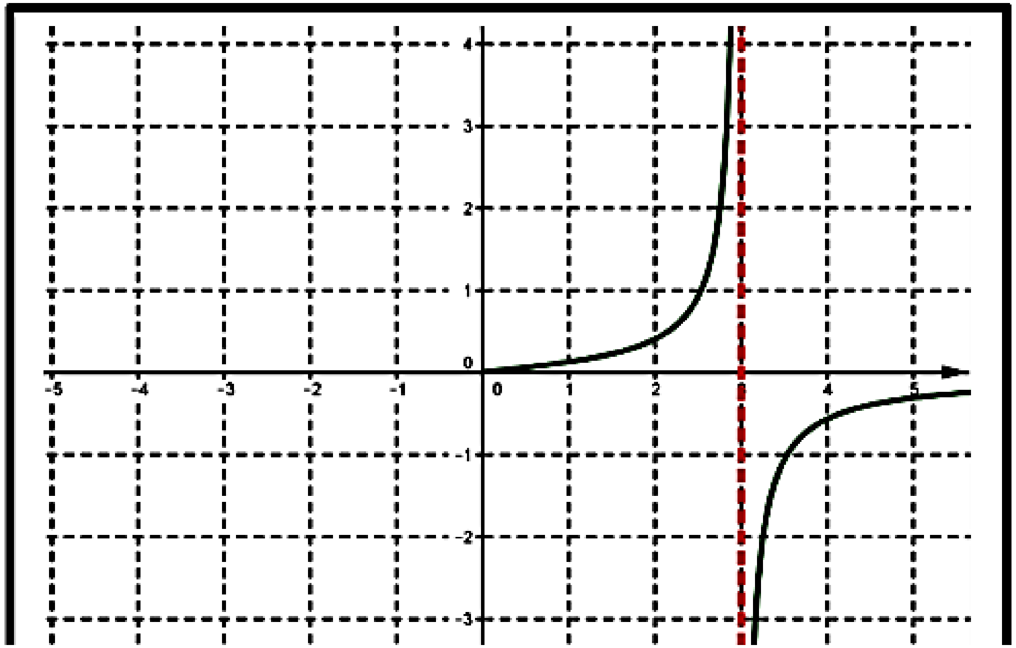
f une fonction tel que $D_f = I \cup J$ avec I et J sont des intervalles symétrique par rapport à zéro

- Si f est paire sur D_f alors le sens des variations de f sont opposées sur I et J
- Si f est impaire sur D_f alors le sens des variations de f sont les même sur I et J

Exercice 09

1) Compléter le tableau et la courbe sachant que f est paire
2) Compléter le tableau et la courbe sachant que f est impaire

X	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
f(x)			‖		0	↗	‖	↗	



C) Comparaison de deux fonctions :

1) Egalité de deux fonctions

Définitions :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g

On dit que la fonction f est égale à la fonction g ssi :

- $D_f = D_g$
- Pour tout $x \in D = D_f = D_g$ on a $f(x) = g(x)$

Interprétation géométrique

La courbe de f est confondue avec la courbe de la fonction g sur D

Exemple :

Soient f et g les fonction définies par : $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = x$

On a : $D_f = D_g = \mathbb{R}$

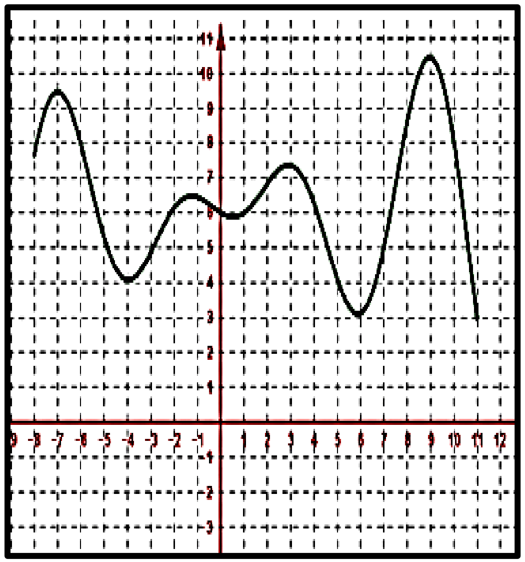
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$

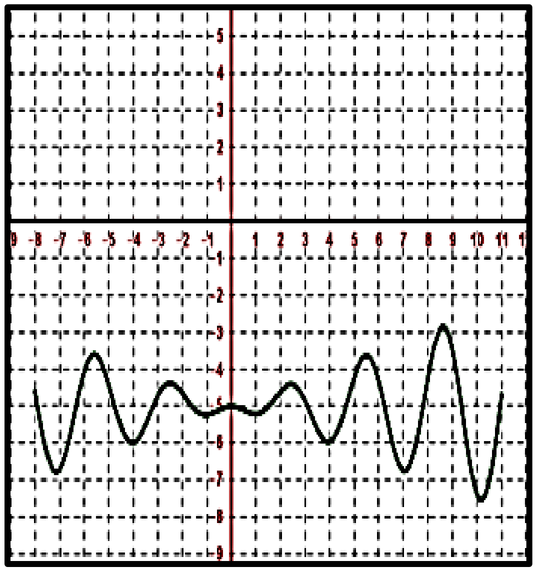
Donc les fonction f et g sont différentes il suffit de prendre $x = -1$

$f(-1) = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$ *mais* $g(-1) = -1$

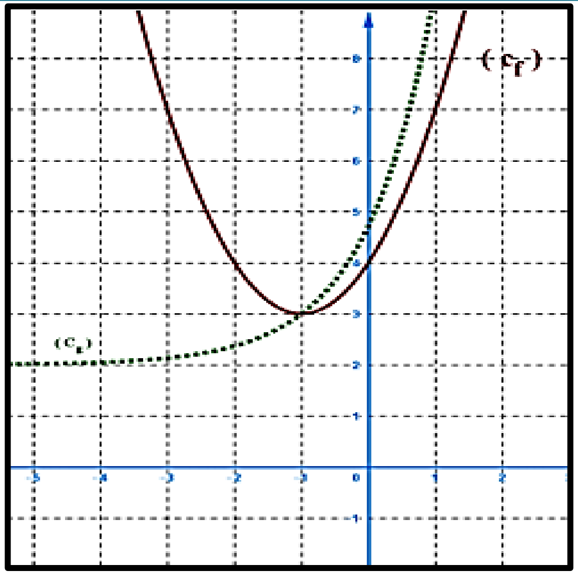
2) Comparaison de deux fonctions et interprétation géométrique

Activité :





La fonction est positive sur $[-8, 11]$, la fonction est négative sur $[-8, 11]$



Dans la figure la courbe de la fonction f est en dessous de la courbe de la fonction g sur l'intervalle $[-1; +\infty[$

On dit que f est inférieur à g sur $[-1; +\infty[$

La courbe de la fonction f est en dessus de la courbe de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty; -1]$

On dit que f est supérieure à g sur $[-1; +\infty[$

Définitions :

Soient f et g deux fonctions définies sur D

- On dit que f est positive ssi : Pour tout $x \in D$; $f(x) \geq 0$

Interprétation géométrique

(C_f) la courbe de f est au dessus de (Ox) sur D

- On dit que f est négative ssi : pour tout $x \in D$; $f(x) \leq 0$

Interprétation géométrique

(C_f) la courbe de f est en dessous de (Ox) sur D

On dit que f est supérieure à g ssi : *Pour tout* $x \in D$; $f(x) \geq g(x)$.

Interprétation géométrique

(C_f) la courbe de f est au dessus de (C_g) la courbe de g sur D

Remarque : Positions relatives de deux courbes,

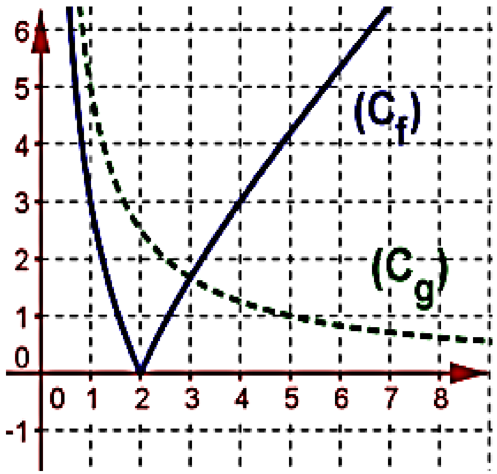
Etudier la position relative de deux courbes de deux fonctions f et g sur D revient à étudier le signe de la différence

$$f(x) - g(x) \text{ pour tout } x \in D$$

- Si $f(x) - g(x) \geq 0$ alors $f(x) > g(x)$ alors (C_f) la courbe de f est au dessus de (C_g) la courbe de g sur D
- Si $f(x) - g(x) \leq 0$ alors $f(x) < g(x)$ alors (C_f) est en dessous de (C_g) sur D

Exercice 10

f et g deux fonctions définit sur$]0;+\infty[$ par son graphe



1) Déterminer $f(1)$; $f(2)$; $f(4)$; $g(5)$ et $g(1)$
2) Dresser la table de variations de f et de g
3) Résoudre graphiquement les équations :
$f(x)=0$; $f(x)=3$ et $g(x)=\mathrm{f}(x)$
4) Résoudre graphiquement les inéquations
$f(x)<3$; $f(x)<g(x)$ et $f(x)\geq g(x)$

Solution

f et g deux fonctions définit sur $]0;+\infty[$ par

1) Déterminer $f(1)$; $f(2)$; $f(4)$; $g(5)$; $g(1)$

$f(1)=3$ et $f(2)=0$ et $f(4)=3$ et $g(5)=1$ et $g(1)=5$

2) Dresser la table de variations de f

On voit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$et décroissante sur $]0;2]$

D'où le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Dresser la table de variations de g

On voit que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

x	0		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	

3)Résoudre graphiquement l'équation

$f(x)=0$; $f(x)=3$; et $g(x)=\mathrm{f}(x)$

Rappel Graphiquement les solutions de l'équation $f(x)=\mathrm{k}$ sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) avec la droite d'équation y= k

- Les solutions de l'équation $f(x)=\mathrm{g}(x)$ sont les abscisses des points d'intersections des courbes (C_f) et $C_g)$

Résolution d'équation $f(x)=0$;

On a la courbe (C_f) coupe la droite d'équations y= 0 en un point unique d'abscisse 2 donc $S=\{2\}$

Résolution d'équation $f(x)=3$;

On a la courbe (C_f) coupe la droite d'équations y= 3 en deux points d'abscisses 1 et 4 donc $S=\{1,4\}$

Résolution d'équation $g(x)=\mathrm{f}(x)$;

On a les courbes (C_f) et $C_g)$ sont sécante en un point unique d'abscisse 3 donc $S=\{3\}$

4)Résoudre graphiquement les inéquations

$f(x)<3$; $f(x)<g(x)$ et $f(x)\geq g(x)$

Rappel : Positions relatives de deux courbes,

- Si $f(x)\geq g(x)$ sur un intervalle I alors la courbe (C_f) est située en dessus de (C_g)
- Si $f(x)\leq g(x)$ sur un intervalle I alors (C_f) est située en dessous de (C_g) sur I

Résolution d'inéquation $f(x)<3$;

On a la courbe (C_f) est située en dessous de la droite d'équation y= 3 sur l'intervalle $]1;4[$ donc $S=]1;4[$

Résolution d'inéquation $f(x)<g(x)$;

On a la courbe (C_f) est située en dessous de la courbe (C_g) sur l'intervalle $]0;3[$
Donc $S=]0;3[$

Résolution d'inéquation $f(x)\geq g(x)$;

On a la courbe (C_f) est située en dessus de la courbe (C_g) sur l'intervalle $[3\,;+\infty[$Donc $S=[3;+\infty[$

D) Parabole – Hyperbole

(C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

1) Parabole

a) Etude et représentation graphique de fonction $f: x \mapsto ax^2$

Activité 01 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1) Etudier le sens des variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$
2) Etudier le sens des variations de la fonction f sur $]-\infty. 0]$
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$
4) Remplier le tableau suivant puis représenter dans un repère, les points $(x ; f(x))$ puis relier ses points

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

Solution

1) Soient x et x deux réels $avec\ x \neq y$

$$T = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$$

Soient $x; y \in [0; +\infty[$

On a : $x + y \geq 0$ donc $T \geq 0$

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$

2) Soient $x; y \in]-\infty; 0]$

On a : $x + y \leq 0\ donc\ T \leq 0$

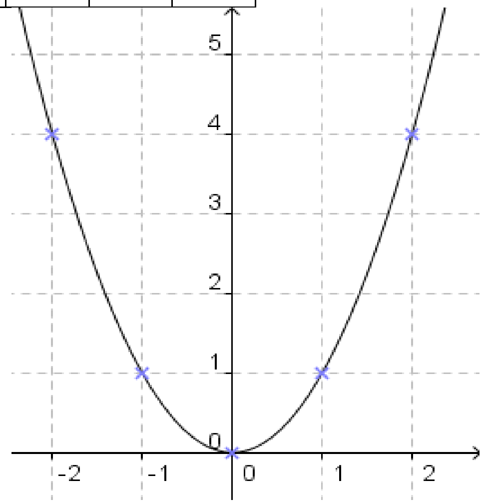
Donc f est décroissante sur$]-\infty; 0]$

3) Le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

4) Remplier le tableau suivant puis représenter dans un repère, les points $(x ; f(x))$ puis relier ses points

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



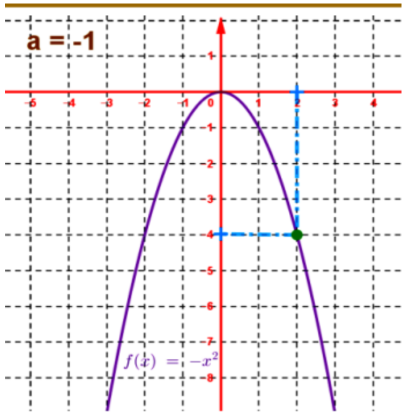
Dire que la fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ signifie que x peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{R}$.

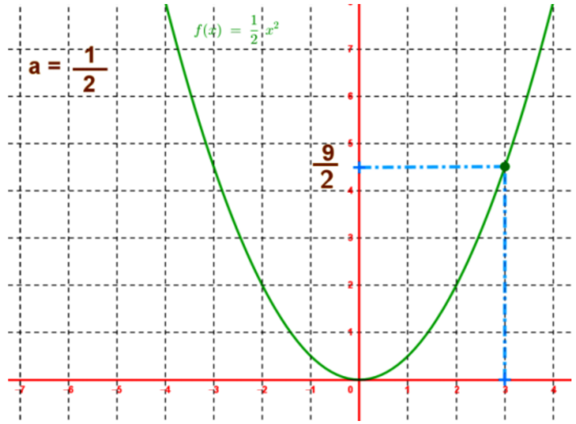
La courbe de la fonction carrée est appelée une parabole de sommet $O(0 ; 0)$

Activité 02 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,x^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

1) Etudier le sens des variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$
2) Etudier le sens des variations de la fonction f sur $]-\infty. 0]$
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$
4) Tracer la courbe de f dans les cas ou $a = -1$ et $a = 1/2$





b) Etude et représentation graphique de fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Activité :

Soit f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b; c \in \mathbb{R}$

1) Calculer le taux de variations de T sur IR
2) Déterminer le sens des variations de f sur l'intervalle $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$ selon le signe de a
3) Déterminer le sens des variations de f sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$ selon le signe de a
4) Dresser le tableau des variations de f dans chaque cas ($cas1$: $a > 0$; $cas2$: $a < 0$)

Propriété :

Soit f la fonction définit sur IR par $f(x) = ax^2 + bx + c$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b; c \in \mathbb{R}$

Le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$

Si $a > 0$ alors la fonction est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$

Si $a < 0$ alors la fonction est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$

Tableau de variations

Si $a > 0$

D'où le tableau de variations de f sur IR

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	↘	$f(-\frac{b}{2a})$	↗

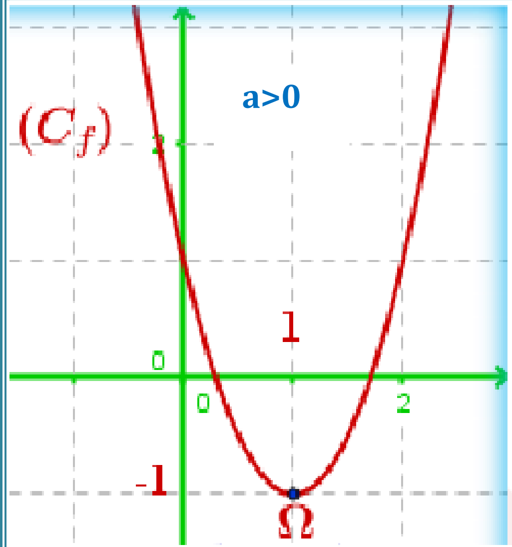
Si $a < 0$

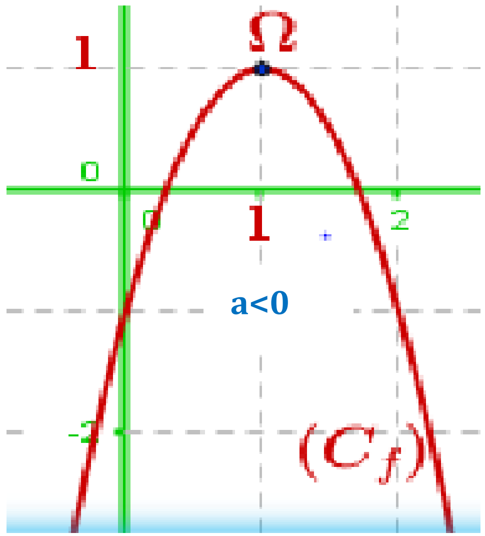
D'où le tableau de variations de f sur IR

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	↗	$f(-\frac{b}{2a})$	↘

La nature de la courbe (C_f)

La courbe (C_f) de f est un parabole de sommet $\Omega(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right))$ et d'axe de symétrie la droite d'équation : $x = \frac{-b}{2a}$





Remarque :

Soit f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$

Soit $x \in \mathbb{R}$

La forme canonique de la fonction f est :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

On pose $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

Donc $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

- La courbe (C_f) de f est un parabole de sommet $\Omega(\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation : $x = \alpha$
- La courbe (C_f) de la fonction f est obtenue en utilisant la translation de vecteur $\vec{u}(\alpha ; \beta)$ de la courbe de la fonction $x \mapsto ax^2$

Exercice 11

Soit f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1) Dresser la table des variations de f

2) Déterminer la nature de (C_f)

3) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Tracer la courbe (C_f) la courbe de la fonctions f dabs un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution

1) On a :

$D_f = \mathbb{R}$

$a = 1$; $b = -4$ et $c = 3$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = 2$$

Et $f(2) = -1$

Le tableau des variations de f :

$a = 1 > 0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

b) La nature de (C_f) : La courbe (C_f) est une parabole de sommet $\Omega(2;-1)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 2$

Rappel :

Les points d'intersection de (Cf) avec l'axe des abscisses (Ox) sont les points dont les abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

L'intersection de (Cf) avec (Oy) l'axe des ordonnées est le point $A(0\,;f(0))$

c) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

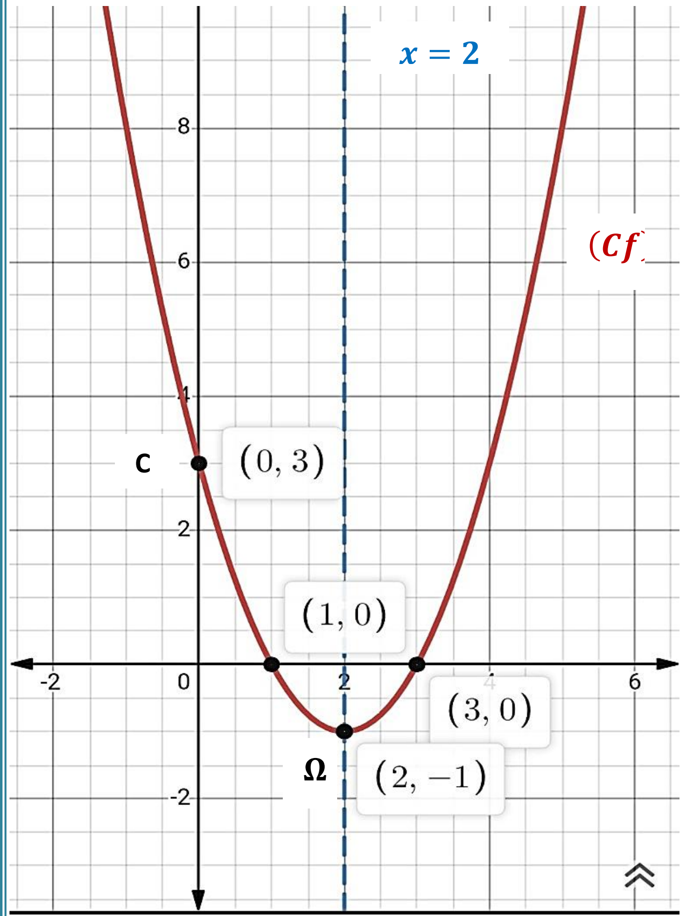
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$

$$x = \frac{4+\sqrt{4}}{2 \times 1} = 3 \quad ou \quad x = \frac{4-\sqrt{4}}{2 \times 1} = 1$$

Les points d'intersection de (Cf) avec l'axe (Ox) sont les deux points $A(1\,;0)$ et $B(3\,;0)$

L'intersection de (Cf) avec (Oy) est le point $C(0\,;f(0))$ $donc$ $C(0\,;3)$

d) Tracer la courbe (C_f) de la fonctions f



2) Hyperbole

a) Etude et représentation graphique de fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

Activité 01 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1) Etudier le sens des variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$
2) Etudier le sens des variations de la fonction f sur $]-\infty; 0[$
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f
4) Remplier le tableau suivant puis représenter dans un repère, les points $(x\,;f(x))$ puis relier ses points sur chaque intervalle

x	-2	$0,25$	1		2	3
$f(x)$						

Solution

1) Soit a et b deux nombres réels strictement positifs avec $a < b$.

$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$

Or $a > 0, b > 0$ et $a - b < 0$. Donc $f(b) - f(a) \leq 0$.

f est ainsi décroissante sur l'intervalle $]0\,; +\infty[$.

2) Soit a et b deux nombres réels strictement négatifs avec $a < b$.

$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$

Or $a < 0, b < 0$ et $a - b < 0$. Donc $f(b) - f(a) \leq 0$.

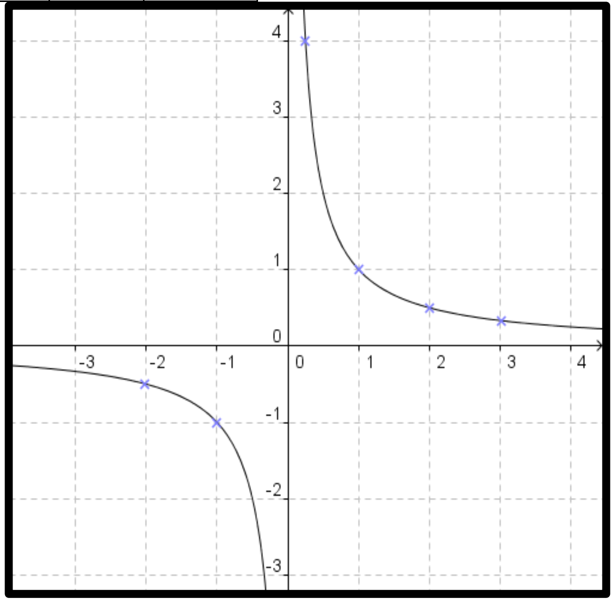
f est ainsi décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

3) le tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

5) Remplier le tableau suivant puis représenter dans un repère, les points $(x\,;f(x))$ puis relier ses points sur chaque intervalle

x	-2	$0,25$	1	2	3
$f(x)$	-0.5	4	1	$0,5$	$\frac{1}{3}$



La courbe (C_f) de f est appelée une hyperbole de centre $O(0;0)$ et d'asymptotes les droites (Ox) et (Oy) d'équations : $x = 0$ et $y = 0$

Remarques :

- Dire que la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ signifie que x peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{R}$ sauf 0.

On dit que la fonction inverse n'est pas définie en 0.

- L'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ peut se noter également $]-\infty\,;\,0\,[\cup]\,0\,;\,+\infty\,[$ ou encore $\mathbb{R}^*$.

Propriétés :

- La courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère. La fonction inverse est impaire.
- Si a et b sont deux nombres réels de même signe, on a alors :

$$a < b \quad est\ équivalent\ à \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Activité 02 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{a}{x}$ avec $a\in\mathbb{R}^*$

6) Etudier le sens des variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$

7) Etudier le sens des variations de la fonction f sur $]-\infty;0[$

8) Dresser le tableau de variation de la fonction f

4) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x)=\frac{2}{x}$

a) Calculer les images de 3 et de 6 par la fonction f.

b) Calculer l'antécédent de 7 par la fonction f.

c) Tracer la courbe (C_f) la courbe de la fonctions f dabs un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Correction

1) Soit x et y deux réels strictement positifs avec $x<y$

$f(x)-f(y)=\frac{a}{x}-\frac{a}{y}=\frac{a(y-x)}{xy}$

Cas $a>0$

Or $x>0, y>0$ et $y-x>0$

Donc $f(x)-f(y)\geq 0$.

f est ainsi décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Cas $a<0$

Donc $f(x)-f(y)\leq 0$.

f est ainsi croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) Soit x et y deux réels strictement négatifs avec $x<y$

$f(x)-f(y)=\frac{a}{x}-\frac{a}{y}=\frac{a(y-x)}{xy}$

Cas $a>0$

Or $x>0, y>0$ et $y-x>0$

Donc $f(x)-f(y)\geq 0$.

f est ainsi décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Cas $a<0$

Donc $f(x)-f(y)\leq 0$.

f est ainsi croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4) Le tableau de variations de g

Cas $a>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

Cas $a<0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

5) a) - Image de 3 : $f(3)=\frac{2}{3}$.

- Image de 6 : $f(6)=\frac{2}{6}$

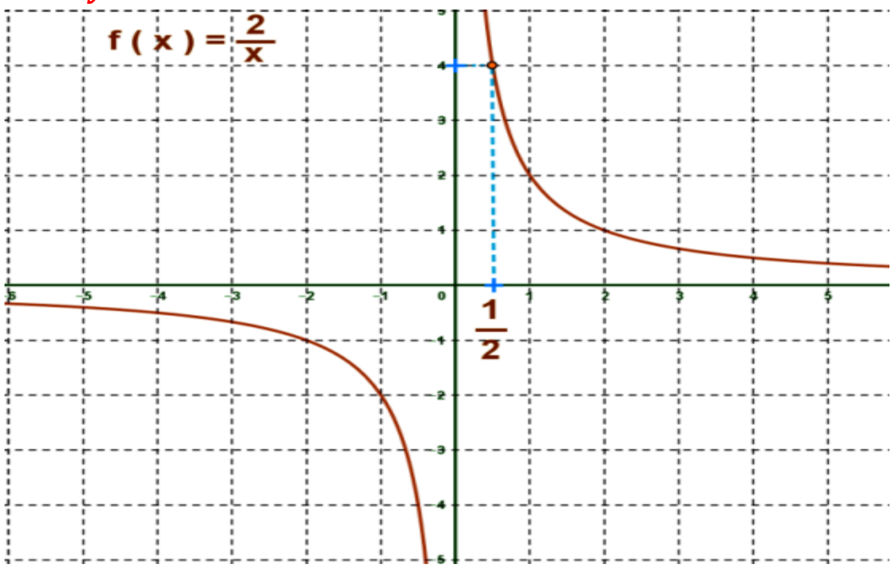
b) Antécédent de 7 :

On résout l'équation $f(x)=7$

Soit $\frac{2}{x}=7$ donc $\frac{x}{2}=\frac{1}{7}$ donc $x=2\times\frac{1}{7}$ donc $x=\frac{2}{7}$

L'antécédent de 7 est $\frac{2}{7}$.

c) La courbe (C_f) de f est appelée une hyperbole de centre $O(0;0)$ et d'asymptotes les droites (Ox) et (Oy) d'équations $x=0$ et $y=0$



c) Etude et représentation graphique de fonction $f : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

Activité :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Avec $a; b; d \in IR$ et $c \in IR^*$

1) Déterminer D_f
2) Soient x ;y des réels dans D_f avec $x \neq y$

Montrer que $T_f = \frac{ad - bc}{(cx+d)(cy+d)}$

On pose : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

3) Déterminer le sens des variations de f sur l'intervalle $\left]\frac{-d}{c}; +\infty\right[$ selon le signe de Δ
4) Déterminer le sens des variations de f sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{-d}{c}\right[$ selon le signe de Δ
5) Dresser le tableau des variations de f dans chaque cas ($cas1$: $\Delta > 0$; $cas2$: $\Delta < 0$)

Propriété :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Avec $a; b; d \in IR$ et $c \in IR^*$

$$D_f = \left]-\infty; \frac{-d}{c}\right[\cup \left]\frac{-d}{c}; +\infty\right[$$

5) Le sens des variations de f sur D_f

On pose :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Si $\Delta > 0$ alors f est str croissante sur D_f

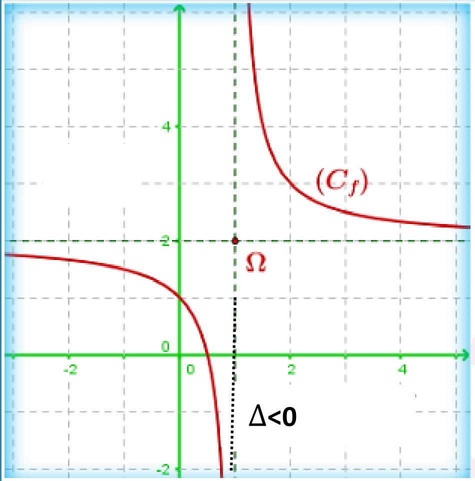
x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
f(x)		↗	‖	↗	

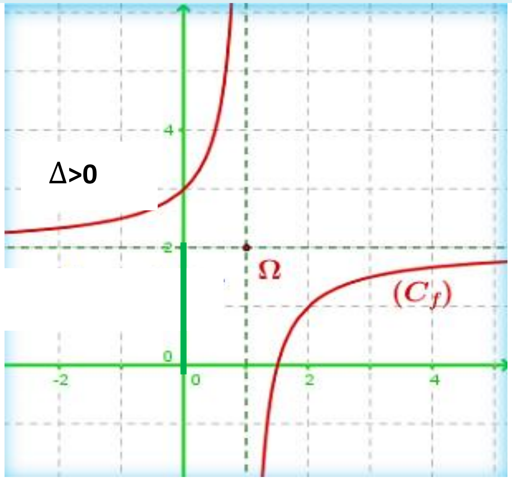
Si $\Delta < 0$ alors f est str décroissante sur D_f

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
f(x)		↘	‖	↘	

➤ **La nature de la courbe de la fonction f**

La courbe (C_f) de f est appelée hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites (D) et (D') d'équations : $x = \frac{-d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$





Remarque : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \beta + \frac{k}{x-\alpha}$$

La courbe (C_f) de f est appelée hyperbole de centre $\Omega(\alpha; \beta)$ et d'asymptotes les droites (D) et (D') d'équations : $x = \alpha$ et $y = \beta$

La courbe (C_f) de la fonction f est obtenue en utilisant la translation de vecteur $\vec{u}(\alpha ; \beta)$ de la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{k}{x}$

Exercice 12

Soit f la fonction définit sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

1) Déterminer D_g

2) Dresser la table des variations de f

3) Déterminer la nature de (C_f)

4) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) Tracer la courbe (C_f) la courbe de la fonctions f dabs un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution

1) Déterminer D_g

On a :

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0\}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1\}$

$D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$D_g =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$$

2) Dresser la table des variations de f

On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (1\times 1) - (2\times 1)$

$= -1$

Donc $\Delta < 0$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty;-1[$ *et* $]-1;+\infty[$

D'où le tableau de variations de g

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		↘	‖	↘	

3) la nature de la courbe (C_g)

La courbe (C_g) de g est une hyperbole de centre $\Omega\left(\frac{-d}{c};\frac{a}{c}\right)$ c-t-dire $\Omega(-1;1)$ et d'asymptotes les droites (D) et (D') d'équations : $x = \frac{-d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$ c-t-dire

$x = -1$ et $y = 1$

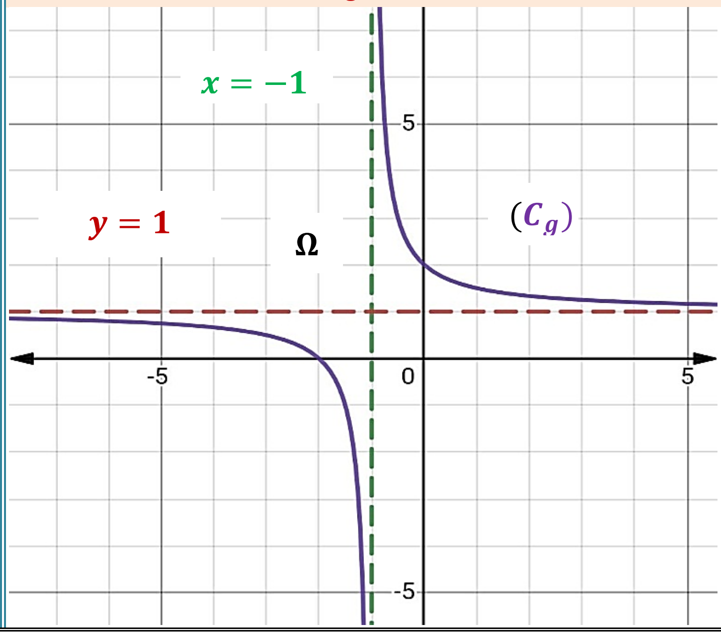
4) Déterminer les points d'intersection de (C_g) avec les axes du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} = 0$$
$$\Leftrightarrow x+2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -2$$

Le point d'intersection de (Cg) avec l'axe (Ox) est le points $A(-2\,;0)$

L'intersection de (Cg) avec (Oy) est le point $B(0\,;g(0))$ *donc* $B(0\,;2)$

5) Tracer la courbe (C_g) de la fonctions g



E) Les fonctions sinus, cosinus, tangente :

1) Les fonctions cosinus, sinus :

Définition :

La fonction qui à chaque nombre réel x associe cos x, est appelée fonction cosinus est noté par :

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \cos x$$

De même on définit la fonction sinus noté par :

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin x$$

Remarque :

- ✶ On a pour toutx de $\mathbb{R}$: $\begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos x \\ \sin(x+2\pi) = \sin x \end{cases}$

  On dit que les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π.
- ✶ On a pour tout x de $\mathbb{R}$: $\cos(-x) = \cos x$

  On dit que la fonction cos est paire (sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).
- ✶ On a pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sin(-x) = -\sin x$

  On dit que la fonction sin est impaire (sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine).

2) Représentation des fonctions cos et sin :

a) Etude de la fonction sin :

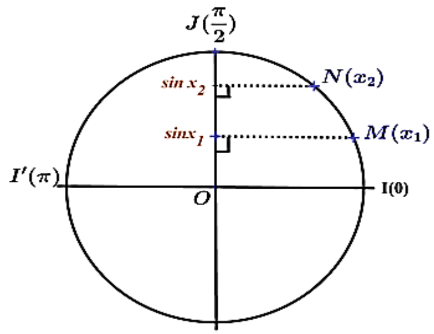
❖ Sens de variation de la fonction sin :

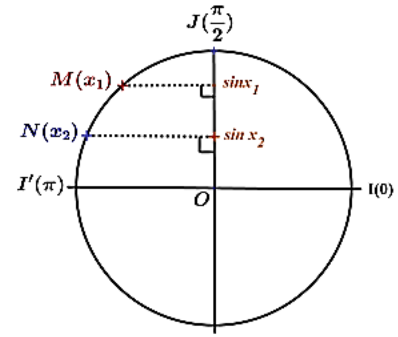
La fonction sin est périodique de période 2π, c'est-à-dire qu'elle se répète tous les 2π.

Donc on peut étudier ses variations sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

La fonction sin est impaire donc on peut réduire l'étude sur l'intervalle $[0;\pi]$

En se référant aux deux figures ci-dessous, on a :





- ➢ Si x_1 et x_2 sont deux éléments de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tels que $x_1 < x_2$, alors $\sin x_1 < \sin x_2$.

Ce qui signifie que la fonction sin est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

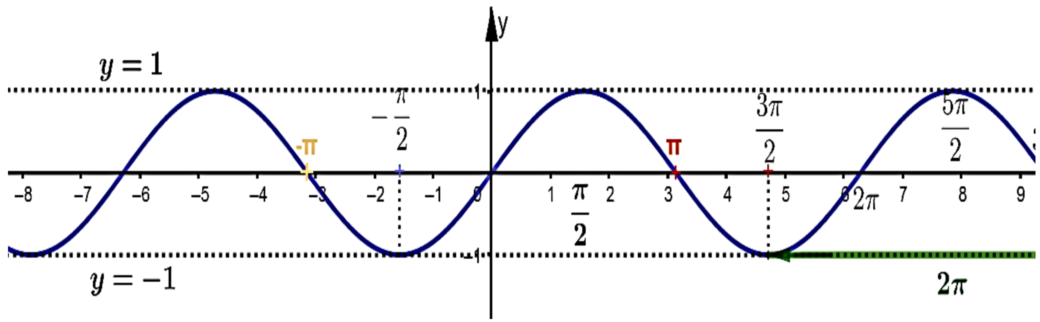
- ➢ si x_1 et $x_2$sont deux éléments de $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ tels que $x_1 < x_2$, alors $\sin x_1 > \sin x_2$.

Donc sin est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
Sin x	0	↘	-1	↗		↗	1	↘	0

Courbe représentative de la fonction sin:



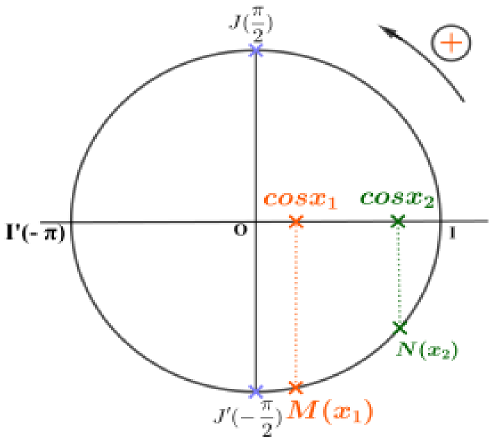
b) Etude de la fonction cos :

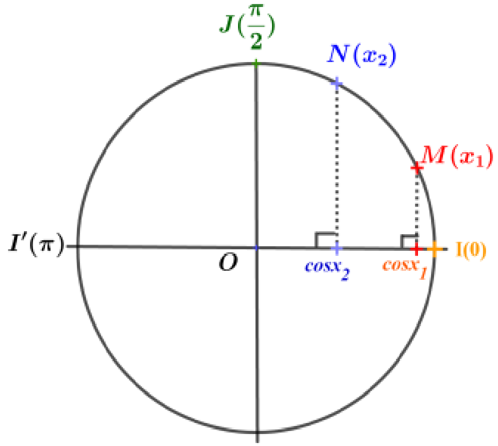
- **Sens de variation de la fonction cos :**

La fonction cos est périodique de période 2π, c'est-à-dire qu'elle se répète tous les 2π.

On peut se contenter d'étudier ses variations sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

La fonction cos est paire donc on peut réduire l'étude sur l'intervalle $[0;\pi]$





En se référant aux deux figures en dessus, on a :

- **si x_1 et x_2 sont deux éléments de $[-\pi;0]$ tels que $x_1 < x_2$, alors $\cos x_1 < \cos x_2$.**

Ce qui signifie que la fonction cos est strictement croissante sur $[-\pi;0]$,

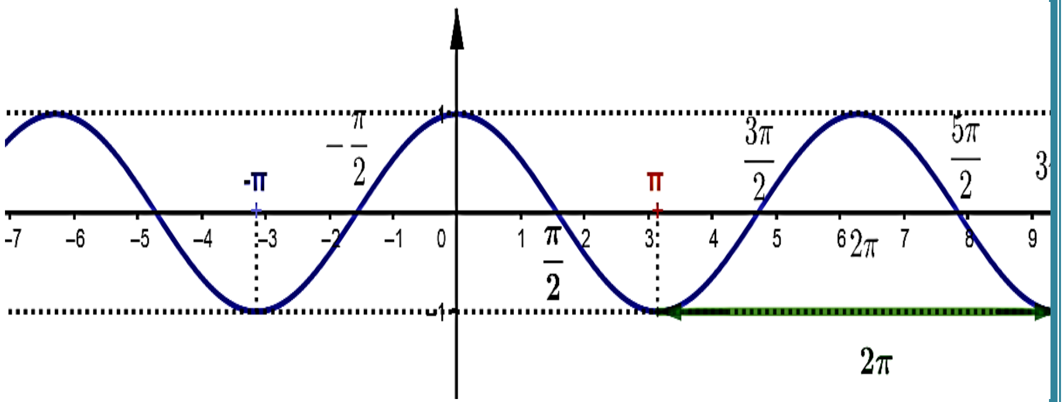
- **si x_1 et x_2 sont deux éléments de $[0;\pi]$ tels que $x_1 < x_2$, alors $\cos x_1 > \cos x_2$.**

Ce qui signifie que la fonction cos est strictement décroissante sur $[0;\pi]$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	-1	↗	1	↘	-1

Courbe représentative de la fonction cos:



2) Fonction tangente :

Définition :

Soit x un nombre réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

(c'est-à-dire $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$)

Le nombre réel $\frac{\sin x}{\cos x}$ s'appelle tangente de x et s'écrit $\tan x$ c'est-à-dire : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

la fonction qui à chaque réel x associe sa tangente, est appelée fonction tangente et se note tan.