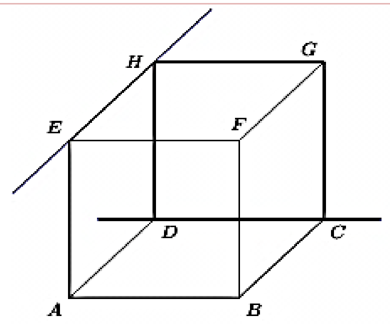
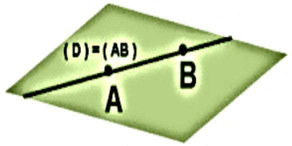
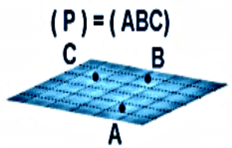
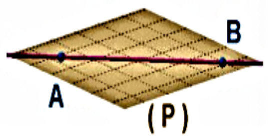
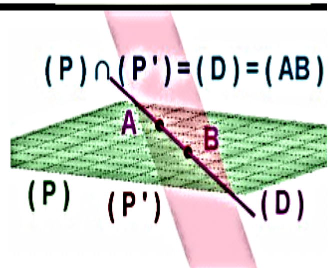
A) Les axiomes de l'espace

Activité :

Dans le plan deux droites n'on aucun point commun donc il sont strictement parallèles ;
Dans l'espace deux droites peuvent étre non coplanaire : les droites (DC) et (HF)



a) Axiome de l'espace

Axiome 1 : Par deux points distincts A et B de l'espace $(\mathscr{E})$ passe une et une seule droite notée (AB)	
Axiome 2 Par trois points non alignés de l'espace $(\mathscr{E})$ passe un plan et un seul noté (ABC).	
Axiome 3 : SI A et B sont deux points distincts d'un plan (P) de l'espace $(\mathscr{E})$ alors la droite (AB) est incluse dans le plan (P) .(c.à.d. $(AB)\subset(P)$	
Axiome 4 : (P) et (P') deux plans distincts de l'espace $(\mathscr{E})$. Si un point A est commun aux deux plans alors les deux plans se coupent suivant une droite passant par le point A.	

b) Détermination d'un plan

Toutes les propriétés de la géométrie plane reste valables à chaque plan (P) de l'espace $(\mathscr{E})$

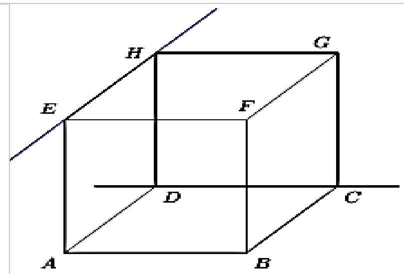
Un plan (P) est déterminé soit par :

1. Une droite (D) et un point qui n'appartienne pas à cette droite $(A\notin(D))$.
2. Trois points A et B et C non alignés de l'espace $(\mathscr{E})$.
3. Deux droites (D) et (D') sécantes de l'espace $(\mathscr{E})$.
4. Deux droites (D) et (D') strictement parallèles de l'espace $(\mathscr{E})$.

A) Position relative de deux droites dans l'espace

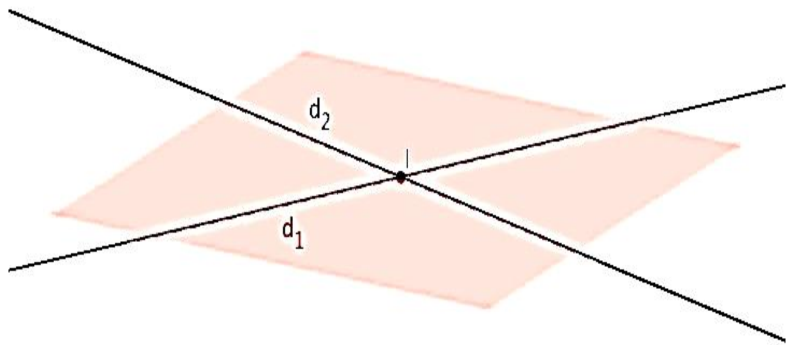
Activité :

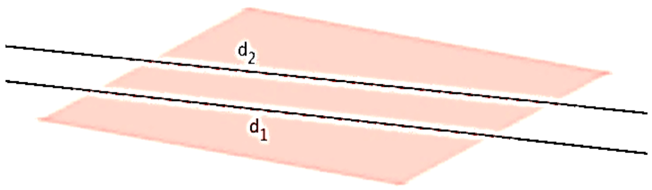
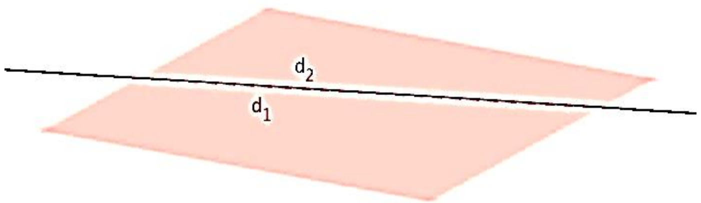
ABCD EFGH un cube
Déterminer tous les positions relatives possibles entre **deux droites** dans l'espace et donner un exemple pour chaque cas



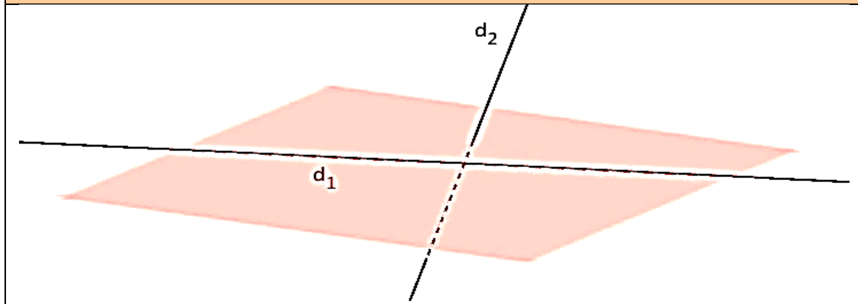
Propriété :

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.

(d_1) et (d_2) sont coplanaires	
les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes	

Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles	 (d_1) et (d_2) sont strictement parallèles
	 (d_1) et (d_2) sont confondus

Les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires



Théorème 01 (axiome) :

Soit (D) une droite de l'espace et A un point de l'espace
Il existe une droite et un seul passant par A et parallèle à (D)

Théorème 02 :

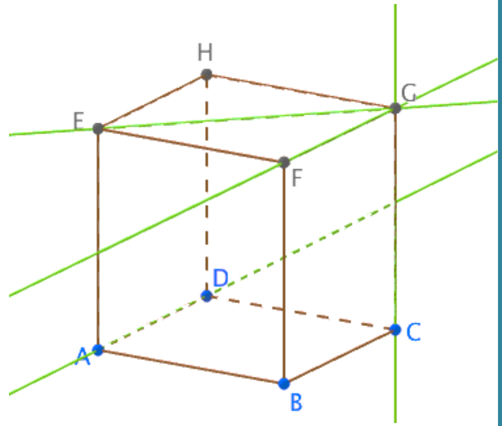
Soient (D) ; (D') et (D'') trois droites de l'espace
Si (D) // (D') et (D')// (D'') , alors (D) // (D'')

Exemple 01 :

(Position relative de deux droites dans l'espace)

ABCDEFGH est un cube.

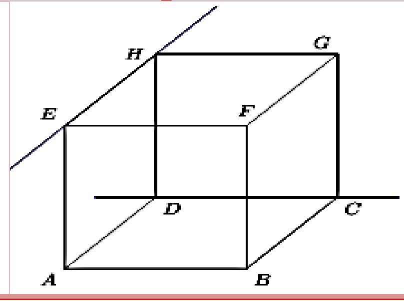
- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G.
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.



B) Position relative de deux plans dans l'espace

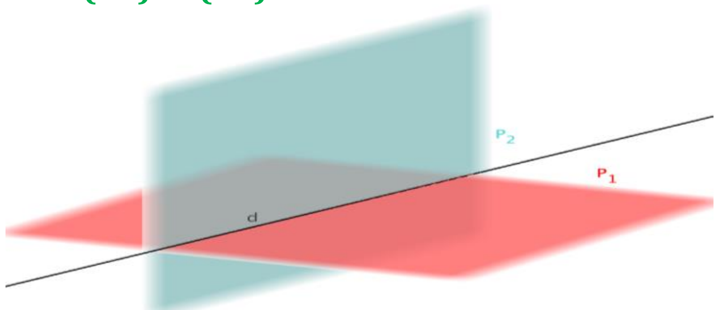
Activité :

ABCD EFGH un cube
Déterminer tous les positions relatives possibles entre deux plans dans l'espace et donner un exemple pour chaque cas



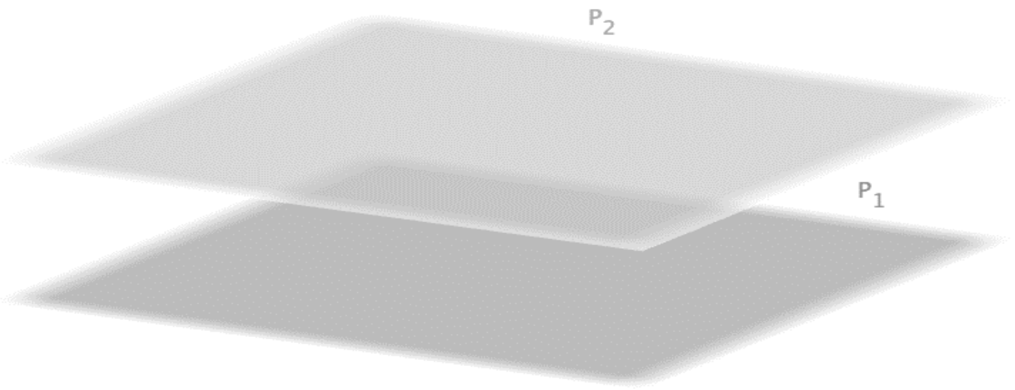
Propriété : Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

1) Les plans (P1) et (P2) sont sécants

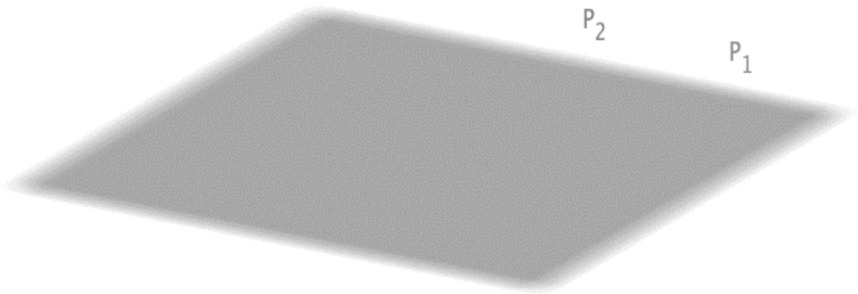


Les plans (P1) et (P2) sont sécants suivant la droite d

2)Les plans (P1) et (P2) sont parallèles



Cas 01 : Les plans (P1) et (P2) sont strictement parallèles



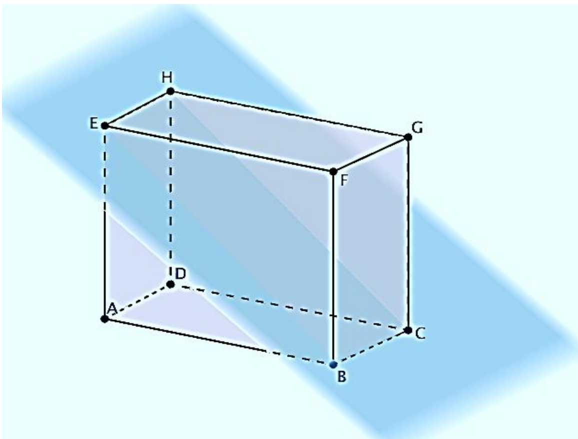
Cas 02 : Les plans (P1) et (P2) sont confondus

Exemples :

(Position relative de deux plan dans l'espace)

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC).
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles

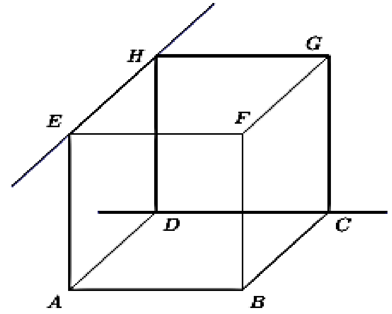


C)Position relative d'une droite et un plan dans l'espace

Activité :

ABCD EFGH un cube

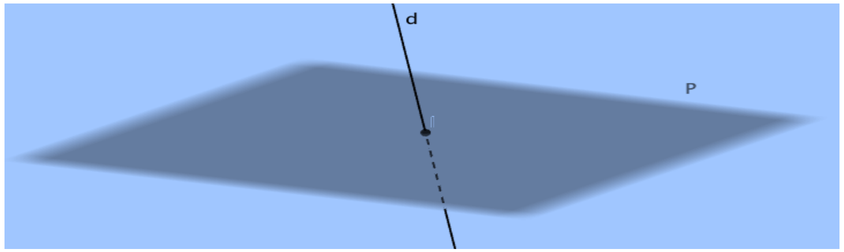
Déterminer tous les positions relatives possibles entre une droite et un plan dans l'espace et donner un exemple pour chaque cas



Propriété :

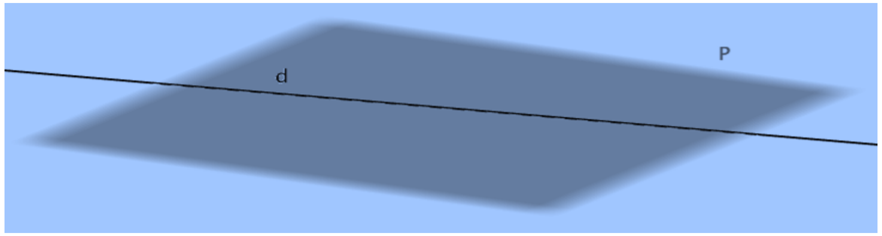
Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

1) (d) et (P) sont sécants

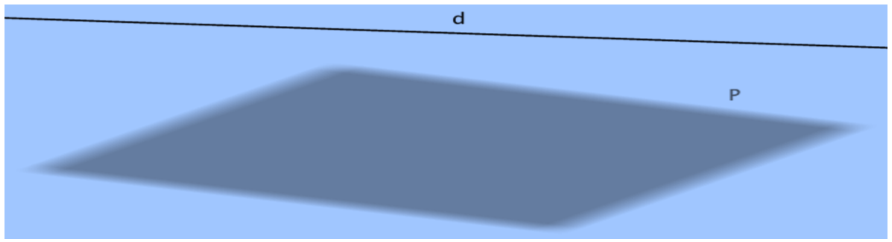


(d) et(P) sont sécants en un point I

2) d et P sont parallèles



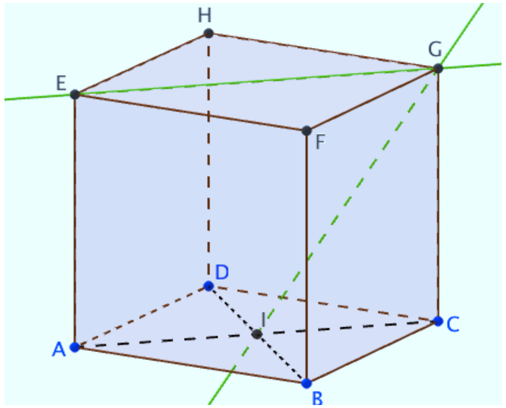
Cas 01 : (d) est incluse dans (P)



Cas 02 : (d) et (P) sont strictement parallèles

Exemples:

(Position relative d'un droite et un plan dans l'espace)



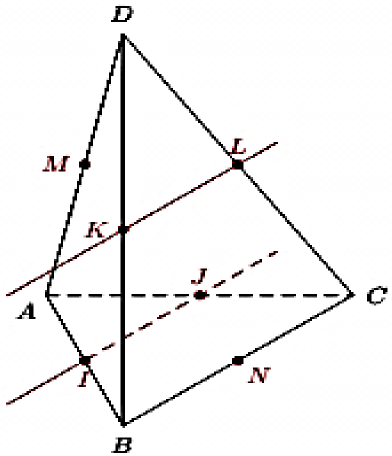
- **La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.**
- **La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).**
- **La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles**

Exercice 01 : (Position relative de deux droites dans l'espace)

Soit ABCD un tétraèdre

Soient I ; J ; K ; L ; M et N les milieux respectifs des segment $[AB]$; $[AC]$; $[BD]$ $[CD]$; $[AD]$ et $[BC]$

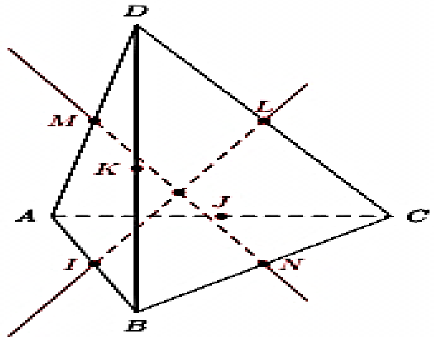
1) **Etudier les positions relatives des droites (IJ) et (KL)**
2) **Etudier les positions relatives des droites (IL) et (MN)**
3) **Etudier les positions relatives des droites (AB) et (MN)**



Solution

1) Dans le triangle ABC ; on a :
(IJ)//(BC) ; de même dans le triangle DBC ona : (KL)//(BC)
donc (IJ)//(BC)
et ona : le point K n'appartient pas au plan ABC (car la droite (KB) est sécante au plan ABC en point B différent à K)
Donc k n'appartient pas à la droite (IJ)
Conclusion : les droites (IJ) et (BC) sont strictement parallèle

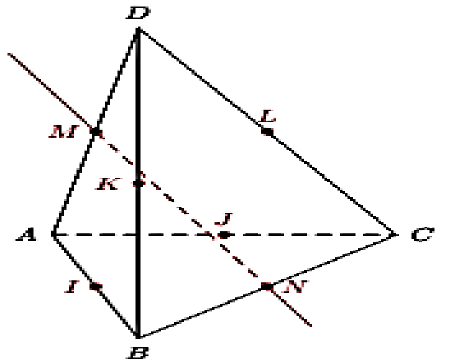
2) IL) et(MN) ?
Dans le triangle ABC : (IN)//(AC)
Dans le triangle ACD : (ML)//(AC)
Donc (IN) // (ML)
Dans le triangle ABD : (MI)//(DB)
Dans le triangle DBC : (LN)//(DB)
Donc (MI)//(LN)
On en déduit que INLM est un parallélogramme
Donc les diagonales de ce parallélogramme se coupent en leur milieux



Conclusion : les droites (IL) et (MN) sont sécantes en le milieu des segment [IL] et [MN]

3) Les droites (AB) et (MN) ?

Supposons que les deux droites sont coplanaires donc les points A ; B ; M et N sont coplanaires donc N appartient au plan (ABD) ce qui n'est pas
Donc les droites (AB) et (MN) ne sont pas coplanaires
(n'ont aucun point commun)

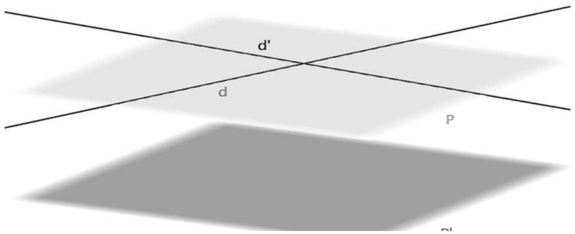


C) Parallélisme dans l'espace

1) Parallélisme de deux plans

Propriété :

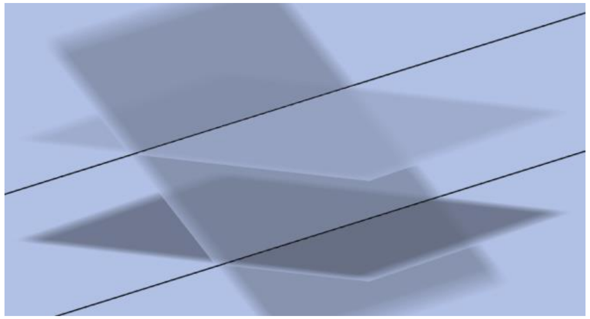
Si un plan P contient deux droites sécantes (d) et (d') parallèles à un plan P' alors les plans P et P' sont parallèles.



2) Parallélisme de deux droites

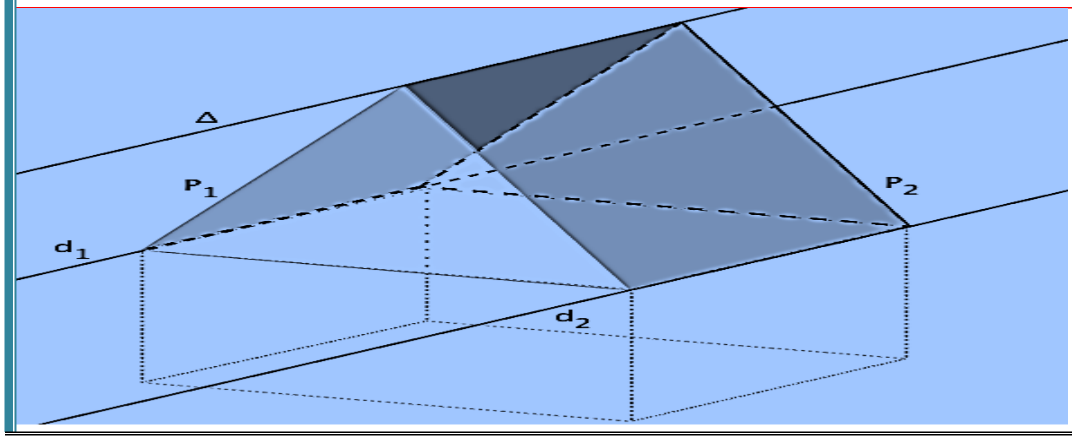
Propriété :

Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles.



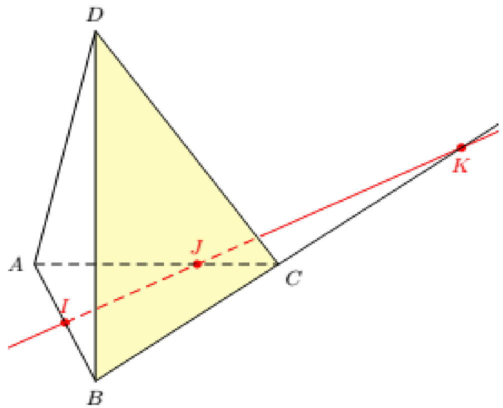
3) Théorème du toit :

(P1)et (P2) sont deux plans sécants.
Si une droite (d1) de (P1) est parallèle à une droite (d2) de (P2) alors la droite d'intersection (Δ) de (P1) et (P2) est parallèle à (d1) et (d2.)



Exercice 02 :
(Position relative de d'une droite et plan dans l'espace)

Soit ABCD un tétraèdre
Soient I le milieu de [AB] et J un point de [AC] tel que : $AJ = \frac{2}{3}AC$



1) **Vérifier que les droites (IJ) et (BC) ne sont pas parallèles**
2) **Montrer que la droite (IJ) n'est pas contenue dans le plan (BCD)**
3) **Montrer que la droite (IJ) est sécante au plan (BCD) et construire le point d'intersection**

Solution

1) **Les droites (IJ) et (BC) sont contenues dans le plan (ABC) et d'après réciproque de théorème de THALES les droites (IJ) et (BC) ne sont pas parallèles donc elles sont sécantes en un point K .**
2) **Montrons que la droite (IJ) n'est pas contenue dans le plan (BCD) ?**

Le point A n'est pas dans le plan (BCD) et la droite (AB) coupe le plan (BCD) en B qui est différent à I donc le point I n'est pas dans le plan (BCD)

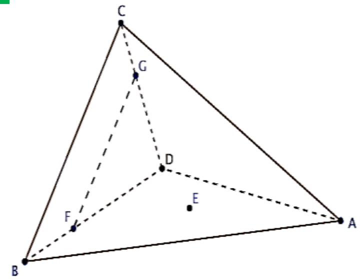
3) **Le point K est un point commun de droite (IJ) et le plan (BCD) donc ou bien la droite (IJ) est contenue dans le plan (BCD) ou bien la droite (IJ) est sécante au plan (BCD) en K ;**

Et comme la droite (IJ) n'est pas contenue dans le plan (BCD)
Donc on déduit que la droite (IJ) n'est pas contenue dans le plan (BCD)
Finalement la droite (IJ) est sécante au plan (BCD) en K

Exercice 03 : (Théorème du toit)

ABCD est une pyramide. Le segment [FG] est parallèle à l'arête [BC]. Et E est un point du plan (ABC)

Construire l'intersection du plan (EFG) avec la pyramide.

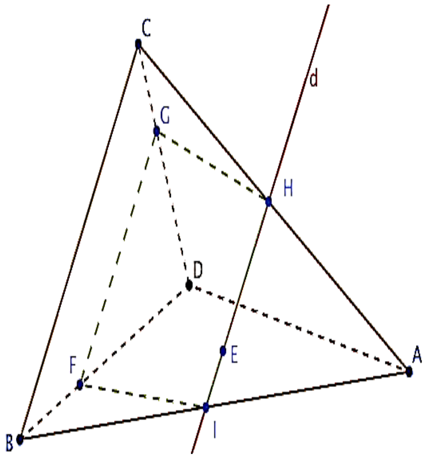


Solution

(BC) est une droite du plan (ABC) et (FG) est une droite du plan (EFG).

Les droites (FG) et (BC) étant parallèles,

On peut appliquer le théorème du toit pour en déduire que les plans (ABC) et (EFG) se coupent suivant une droite d passant par E et parallèle à (FG) et (BC). Cette droite coupe [AC] en H et [AB] en I.



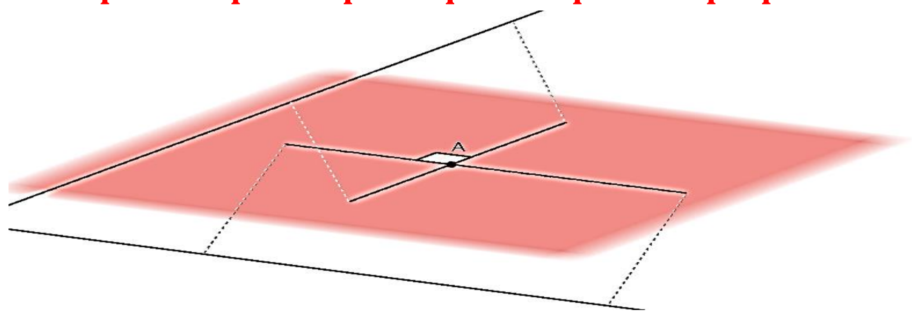
l suffit enfin de tracer le quadrilatère FGHI : intersection du plan (EFG) avec la pyramide

B) Orthogonalité dans l’espace

1) Orthogonalité de deux droites

Définition :

Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.



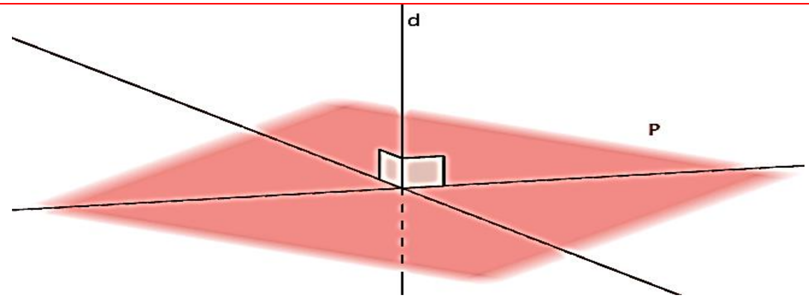
Remarques :

- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- *Si* $(D) \perp (D')$ et $(\Delta)//(D)$ alors $(\Delta)//(D')$

2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété :

Une droite *(d)* est orthogonale à un plan *P* si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de *P*.



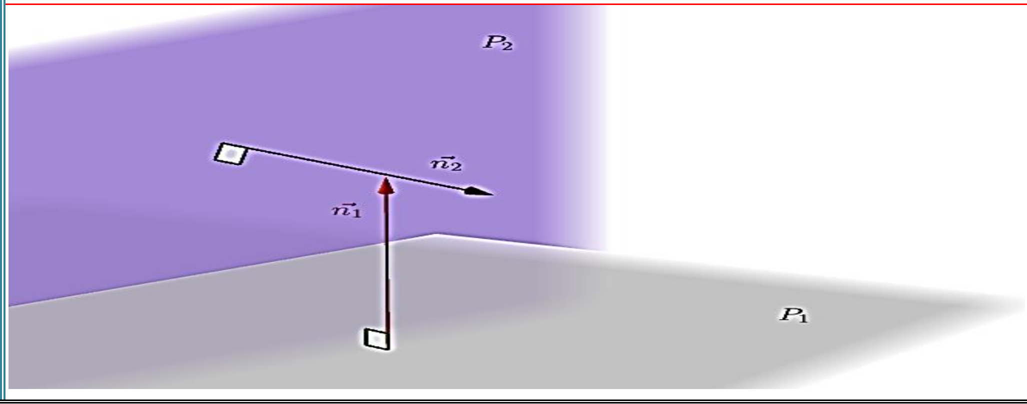
Propriété :

Si une droite *(d)* est orthogonale à un plan *P* alors elle est orthogonale à toutes les droites de *P*.

- Si $(P)//(Q)$ et $(D) \perp (P)$ alors $(D)//(Q)$
- Si $(D) \perp (P)$ et $(\Delta) \perp (P)$ alors $(\Delta)//(D)$
- Si $(D) \perp (P)$ et $(\Delta) \perp (Q)$ alors $(P)//(Q)$

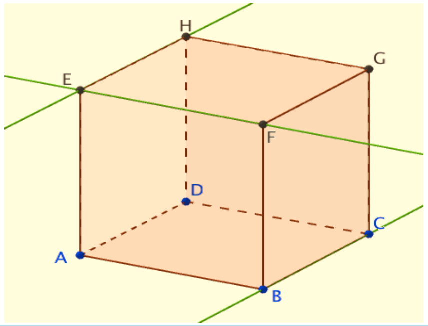
3) Orthogonalité de deux plans

Propriété : Deux plans sont perpendiculaires lorsqu' une droite de l'un est orthogonal à l’ autre plan



Exemple 01 :
Orthogonalité de deux droites

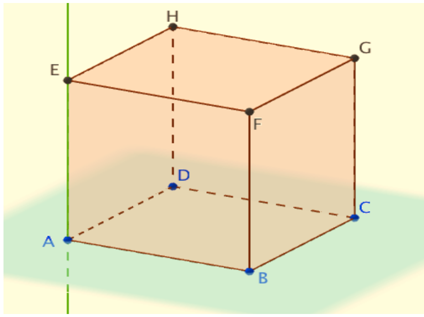
ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.



Exemple 02 :
Orthogonalité d'une droite et d'un plan

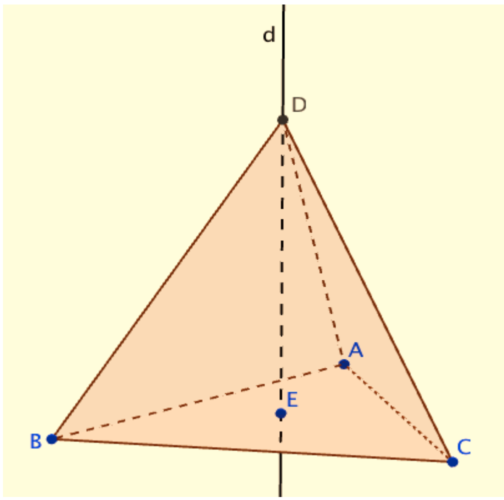
ABCDEFGH est un cube.
- (AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).
- (AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC).

Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).



Exercice4 :
(Droites orthogonaux)

ABC est un triangle équilatéral.
E est le point d'intersection de ses médianes .La droite (d) passant par E est orthogonale au plan (ABC).
La pyramide ABCD est telle que D soit un point de la droite d.
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.

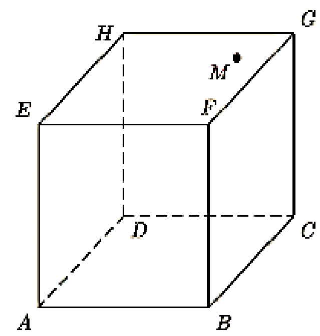


Solution

La droite (d) est orthogonale au plan (ABC).
Comme la droite (AC) appartient au plan (ABC), la droite (AC) est orthogonale à la droite (d).
Par ailleurs, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BE) car dans un triangle équilatéral, les médianes et les hauteurs sont confondues.
Ainsi, (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BED) : (BE) et d.
Donc (AC) est orthogonale à (BED).
La droite (BD) appartient au plan (BED) donc la droite (AC) est orthogonale à la droite (BD).

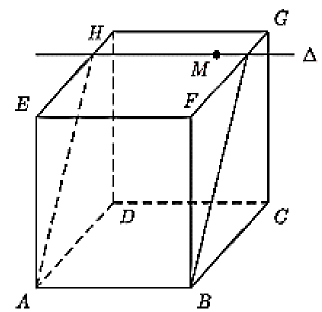
Exercice 05 :(Construction)

ABCDEFGH un cube
Sur la face EFGH ; on place M
1) Vérifier que les plans (EFG) et (ABM) ne sont pas confondus
2) Vérifier que les plans (EFG) et (ABM) ne sont pas parallèles
3) Montrer que les plans (EFG) et (ABM) sont sécants selon une droite (D) que l'on déterminera



Solution

1) On a A n'appartient pas à (EFG)
2) On a M appartient aux plans (ABM) et (EFG)
3) Les plans (ABC) et (EFG) son parallèle et sécant au plan (ABM) ; et le plan (ABM) coupe le plan (ABC) selon (AB) et donc (ABM) coupe (EFG) selon une droite (D) passe par M et parallèle à (AB)



Exercice 05 :

ABCDEFGH un cube

1) Montrer que (DC) et (HG) sont strictement parallèlle
2) Montrer que (BF) et (HC) sont non coplanaire

Exercice 05 :

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

1) Montrer que (EFG) // (AB)
3) Soient I et J les mileux respectivement des segment [EF] et [FG] ; Montrer que (EGB)//(IJ)

Exercice 05 :

ABCDEFGH un cube

1) Montrer que (ABC) // (EFG)
2) Montrer que les plans (ABC) et (AED) sont sécantes suivant une droite à déterminer

Exercice 05 :

SABCD une pyramide de base le parallélogramme ABCD et soient I et J les mileux respectivement des segment [SC] et [SA]

1) Montrer que (AD)//(IJ)
2) Montrer que(ABC)//(IJK)

Exercice 05 :

ABCDEFGH un cube

1) Montrer que $(DC) \perp (AE)$
2) Montrer que $(BF) \perp (GH)$
3) Montrer que $(BF) \perp (ABC)$
4) Montrer que $(BF) \perp (AC)$

Exercice 05 :

ABCDEFGH un cube et soient I et J et K les mileux respectivement des segment [BF] et [FG] et [AE]

1) Montrer que $(DE) \perp (IJK)$
2) Montrer que $(CF) \perp (IJK)$

Exercice 05 :

Soit ABCD un tétraèdre

Soient I ; J ; K ; L ; M et N les milieux respectifs des segment [AB]; [AC] ; [BD] [CD] ; [AD] et [BC]

1) Etudier les positions relatives des droites (IJ) et (KL)
2) Etudier les positions relatives des droites (IL) et (MN)
3) Etudier les positions relatives des droites (AB) et (MN)

Exercice 05 :

Soit ABCD un tétraèdre non aplati

Soient I le milieu de [AB] et J un point de [AC] tel que : $AJ = \frac{2}{3}AC$

Montrer que la droite (IJ) est sécante au plan (BCD) et construire le point d'intersection

Exercice 05 :

ABCDEFGH un cube

Sur la face EFGH ; on place M sur la face EFGH

1) Vérifier que les plans (EFG) et (ABM) ne sont pas confondus
2) Vérifier que les plans (EFG) et (ABM) ne sont pas parallèles
3) Montrer que les plans (EFG) et (ABM) sont sécants selon une droite (D) que l'on déterminera

Exercice 05 :

ABC est un triangle équilatéral. E est le point d'intersection de ses médianes .La droite (d) passant par E est orthogonale au plan (ABC).

La pyramide ABCD est telle que D soit un point de la droite d.

Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.