A) Symétrie axiale - centrale- translation- homothétie

Activité 01 : (Rappels)

Soient ABCD est un losange de centre O et I et J sont respectivement les milieu des segments
$[AB]$ et $[AD]$

1) Faire une fiqure
2) a) Déterminer la symétrie de chacune des points A ; B et O par rapport à O
   b) Déduite le symétrique de (AB) par rapport à O
3) a) Déterminer la symétrie de chacune des point B ;O et I par rapport à la droite (AC)
   b) Déduire la symétrie du droite (OI) par rapport à la droite (AC)
4) a) Déterminer l'image du point A par la translation du vecteur : $\overrightarrow{BC}$
   b) Déterminer l'image du point B par la translation du vecteur : $\overrightarrow{IJ}$
   c) Déterminer l'image du segment $[BO]$ par la translation du vecteur : $\overrightarrow{IJ}$

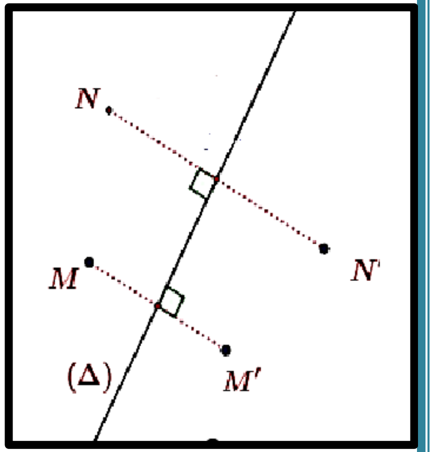
1) Symétrie axiale

Définition

Soit (Δ) une droite dans le plan et M un point

La symétrie axiale d'axe (Δ) est la transformation qui transforme le point M du plan au point M' tel que :

La droite (Δ) est la médiatrice du segment $[MM']$



La symétrie axiale d'axe (Δ) est noté $S_{(\Delta)}$

On écrit $S_{(\Delta)}(M) = M'$ ssi (Δ) est la médiatrice du segment $[MM']$

Dans la figure on a : $S_{(\Delta)}(M) = M'$ et $S_{(\Delta)}(N) = N'$

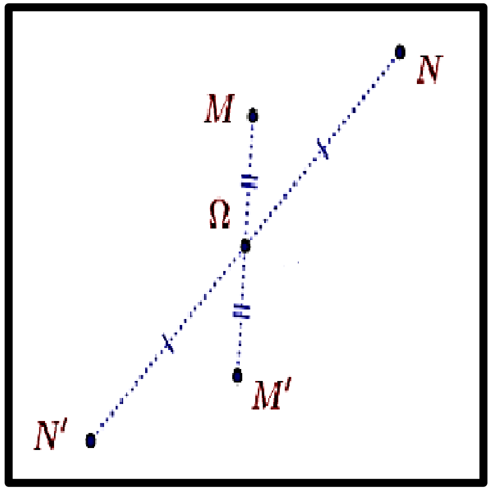
2) Symétrie centrale

Définition

Soit Ω un point du plan

La symétrie centrale de centre Ω est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que :

$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$



La symétrie centrale de centre Ω est notée : S_Ω

On écrit :

$S_\Omega(M) = M'$ ssi $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$

Dans la figure on a : $S_\Omega(M) = M'$ et $S_\Omega(N) = N'$

Remarque

On a : $S_\Omega(\Omega) = \Omega$

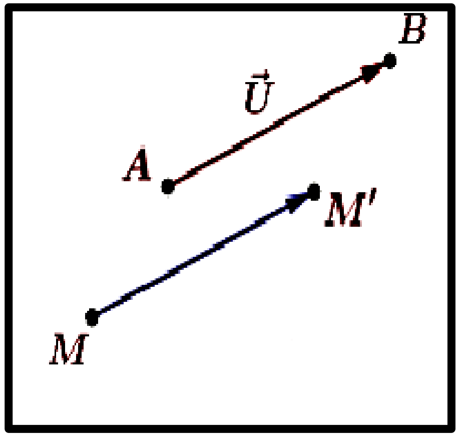
On dit que Ω est un point invariant par la symétrie centrale S_Ω

3) Translation

a) Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur dans le plan

La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$



La translation de vecteur $\vec{u}$ est notée par : $T_{\vec{u}}$

On écrit : $T_{\vec{u}}(M) = M'$ *ssi* $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

b) Propriété caractéristique

Activité 05 : (Propriété caractéristique)

Soit $\vec{u}$ un vecteur

1) Soit $t_{\vec{u}}$ une taranslation de vecteur $\vec{u}$ tel que : $t_{\vec{u}}(M) = M'$ et $t_{\vec{u}}(N) = N'$

Montrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

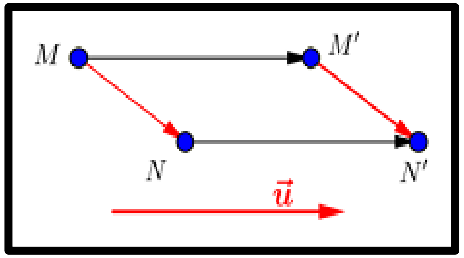
2) Soit T la transformation tel que

$T(M) = M'$ et $T(A) = A'$ et $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$

Montrer que T est une translation et déterminer son vecteur

Propriété caractéristique

Une transformation T est une translation si est seulement s'il transforme deux point M et N du plan en deux point M' et N' tels que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$



4) Homothétie

Activité :

1) Soient O ;A et B trois point non alignés :

Construire les points A' et B' tel que :

$\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}$

On dit que A' est l'image du point A par l'homothétie h de centre O et de rapport 3

et on écrit : $h_{(O.3)}(A) = A'$

2) Déterminer $h_{(O.3)}(B)$ et $h_{(O.3)}(O)$

On dit que le point O est invariant par l'homothétie h

1) Soit M un point du plan

a) Construire M' l'image de point M par h

b) Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$ et déduire que les droites (AB) et (A'B') sont parallèle

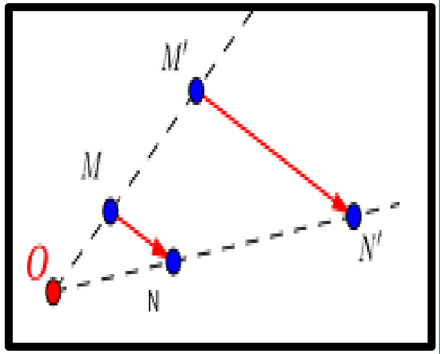
c) Montrer que $(AM)//(A'M')$

Définition :

Soit O un point du plan et k un nombre réel non nul

L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation qui transforme tout point M du plan au point M' tel que :

L'homothétie de centre O et de rapport k est notée : $h_{(\Omega;k)}$



On écrit :

$h_{(O;k)}(M) = M'$ ssi $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

Remarque

On a $h(O) = O$

On dit que O est un point invariant par l'homothétie h de centre O et de rapport k

Exercice 01 :

Soit l'homothétie h de centre O et de rapport 2

1) Construire A' est l'image du point A par l'homothétie h

2) Construire B' est l'image du point B par l'homothétie h

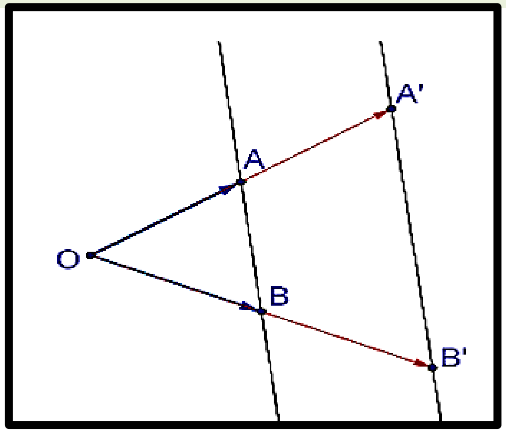
Solution :

Soit l'homothétie h de centre O et de rapport 2

On a :

$h_{(O.2)}(A) = A'$ ssi $\overrightarrow{OM'} = 2\,\overrightarrow{OM}$

$h_{(O.2)}(B) = B'$ ssi $\overrightarrow{OB'} = 2\,\overrightarrow{OB}$



b) Propriété caractéristique

Activité :

Soient O un point et $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

1) Soit h une homothétie de centre O et de raport k tels que : $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$

Montrer que $\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{M'N'}$

2) Soit T une tarnsformation tel que : $T(M) = M'$ et $T(N) = N'$ et $\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{M'N'}$

Montrer que T une homothétie en déterminant ses caractériqtiques

Propriété caractéristique

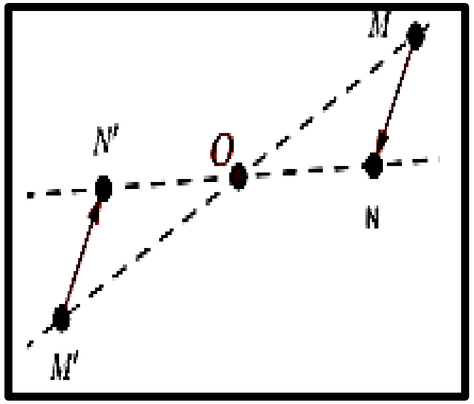
Ω un point du plan et $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

Une transformation T est une homothétie si est seulement s'il transforme deux point M et N du plan en deux point M' et N' tels que $\overrightarrow{MN} = k\,\overrightarrow{M'N'}$

Résultat :

Si on prend $k = -1$ on trouve la Propriété caractéristique d'une symétrie centrale

Une transformation T est une symétrie centrale si est seulement s'il transforme deux point M et N du plan en deux point M' et N' tels que $\overrightarrow{MN} = -\,\overrightarrow{M'N'}$



B) Propriétés de conservation

Activité 03

Conservation de coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Soient A ; B ; C et D de plan tel que :

$\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$ avec k un réel non nul

et A' ; B' ; C' et D' leur images respectivement par un tarnsformation T

1) Montrer que : $\overrightarrow{C'D'} = k\,\overrightarrow{A'B'}$ pour $T = t_{\vec{u}}$
2) Montrer que : $\overrightarrow{C'D'} = k\,\overrightarrow{A'B'}$ pour $T = S_O$
3) Montrer que : $\overrightarrow{C'D'} = k\,\overrightarrow{A'B'}$ pour $T = S_{(D)}$
4) Déduire que les taransformations précédentes conserve le coefficient d'alignement de trois points
5) Déduire que les taransformations précédentes conserve le milieu d'un segment $[AB]$
6) Déduire que les taransformations précédentes conserve la paralilisme de deux droites
7) Soit $h_{(O;2)}$ l'homothétie de centre O et de rapport 2 ; et soient Soient A ; B ; C et D de plan tel que : $\overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD} = 4\,\overrightarrow{AB}$ et A' ; B' ; C' ; D' et E' leur images par h
   a) Faire une figure
   b) Montrer que : $\overrightarrow{A'E'} = 3\,\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'} = 4\,\overrightarrow{A'B'}$
   c) Que peut'on déduire ?

1) Propriétés de conservation de la translation :

- La translation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs
- La translation conserve l'alignement de trois points
- La translation conserve le milieu
- La translation conserve la distance
- La translation conserve la mesure des angles
- La translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité

2) Propriétés de conservation de la symétrie centrale :

- La symétrie centrale conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs
- La symétrie centrale conserve l'alignement de trois points
- La symétrie centrale conserve le milieu
- La symétrie centrale conserve la distance
- La symétrie centrale conserve la mesure des angles
- La symétrie centrale conserve le parallélisme et l'orthogonalité

3) Propriétés de conservation de la symétrie axiale :

- La symétrie axiale conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs
- La symétrie axiale conserve l'alignement de trois points
- La symétrie axiale conserve le milieu
- La symétrie axiale conserve la distance
- La symétrie axiale conserve la mesure des angles
- La symétrie axiale conserve le parallélisme et l'orthogonalité

4) Propriétés de conservation d'une homothétie :

- L'homothétie conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs
- L'homothétie conserve l'alignement de trois points
- L'homothétie conserve le milieu
- L'homothétie ne conserve pas les distance
- L'homothétie conserve la mesure des angles
- L'homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité

B) Image des figures

1) Image d'une figure par une translation

- L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui parallèle
- L'image d'une demi-droite par une translation est une demi-droite qui lui parallèle
- L'image d'un segment par une translation et un segment de même longueur
- L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon

2) Image d'une figure par une symétrie centrale

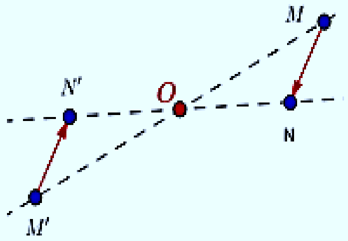
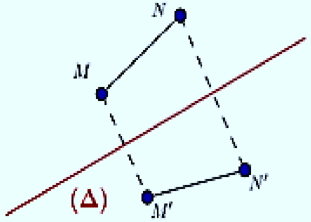
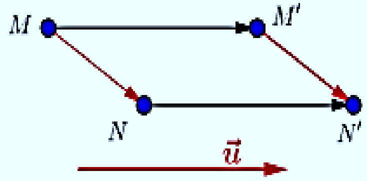
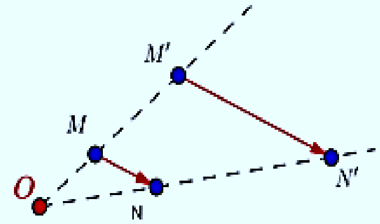
- L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui parallèle
- L'image d'une demi-droite par symétrie centrale est une demi-droite qui lui parallèle
- L'image d'un segment par symétrie centrale et un segment de même longueur
- L'image d'un cercle par symétrie centrale est un cercle de même rayon

3) Image d'une figure par une symétrie axiale

- L'image d'une droite par une symétrie axiale est une droite qui lui parallèle que si la droite est parallèle à l'axe de symétrie
- L'image d'une demi-droite par symétrie axiale est une demi-droite
- L'image d'un segment par symétrie centrale et un segment de même longueur
- L'image d'un cercle par symétrie centrale est un cercle de même rayon

4) Image d'une figure par une homothétie

- L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui parallèle que si la droite est parallèle à l'axe de symétrie
- L'image d'une demi-droite par une homothétie est une demi-droite
- L'image d'un segment par une homothétie et un segment
- L'image d'un cercle par une homothétie est un cercle

Transformation T	***Symétrie centrale:*** S_O	***Symétrie axiale:*** $S_{(\Delta)}$	***Translation:*** $t_{\vec{u}}$	***Homothétie:*** $h_{(O,k)}$
Définition	$S_O(M)=M'$ équivaut $\overline{OM'}=-\overline{OM}$	$S_{(\Delta)}(M)=M'$ équivaut (Δ) est la médiatrice de $[MM']$	$t_{\vec{u}}(M)=M'$ équivaut $\overline{MM'}=\vec{u}$	$h_{(O,k)}(M)=M'$ équivaut $\overline{OM'}=k\overline{OM}$
Figure				
Points invariants	Le centre O est le seul point invariant	Tout point de l'axe (Δ) est invariant	Aucun point invariant si $\vec{u}\neq 0$ Tout point est invariant si $\vec{u}=0$	Le centre O est le seul point invariant si $k\neq 1$ Tout point est invariant si $k=1$
Propriété caractéristique	T est une symétrie centrale ssi pour tous M *et* N du plan $\overline{M'N'}=-\overline{MN}$ tels que $T(M)=M'$ et $T(N)=N'$		T est une translation ssi pour tous M *et* N du plan $\overline{M'N'}=\overline{MN}$ tels que $T(M)=M'$ et $T(N)=N'$	T est une homothétie ssi pour tous M *et* N du plan $\overline{M'N'}=k\overline{MN}$ tels que $T(M)=M'$ et $T(N)=N'$
Image d'une droite (D)	Une droite (D') parallèle à (D) La même droite (D), si $O\in(D)$	Une droite (D') parallèle à (D) si $(D)//(\Delta)$ La même droite (D), si $(D)\perp(\Delta)$ Une droite sécante avec (D) dans les autres cas	Une droite (D') parallèle à (D) La même droite (D), si $\vec{u}$ est le vecteur directeur de (D)	Une droite (D') parallèle à (D) La même droite (D), si $O\in(D)$
Image d'un cercle $C(\Omega,r)$	Un cercle de centre $T(\Omega)$ et de même rayon r			Un cercle de centre $T(\Omega)$ et de rayon $\|k\|r$
Propriétés communes	Les symétries centrale et axiale et la translation **Conservent la distance**: ce sont des **isométries**			L'homothétie n'est pas une **isométrie :** elle ne conserve pas la distance
	Toutes les transformations conservent : L'alignement des points –le milieu d'un segment –le parallélisme et l'orthogonalité de deux droite – la mesure des angles géométriques			