Cours 1 : Ensemble $\mathbb{N}$ et notion d'arithmétique

I) Définitions et notations

$0, 1, 2, 3, 4 \dots$ Sont des nombres entiers naturels, ils forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}$ tel que : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$

- 0 est un entier naturel nul.
- $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls, et on écrit : $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$.
- Tous les éléments de $\mathbb{N}^*$ appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$, on dit que $\mathbb{N}^*$ inclus dans $\mathbb{N}$,

et on écrit : $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ et $(\mathbb{N} \not\subset \mathbb{N}^*)$.

- Si un nombre a appartient à $\mathbb{N}$, on écrit $a \in \mathbb{N}$ sinon $a \notin \mathbb{N}$.

Exemples :

$2 \in \mathbb{N}$; $2019 \in \mathbb{N}^*$; $-6 \notin \mathbb{N}$; $0 \notin \mathbb{N}^*$

II) Nombres pairs et impairs :

Activité :

Déterminer parmi les nombres suivants les nombres pairs et impairs :

208 ; 37 ; 25 ; -15 ; $\frac{15}{5}$; $\sqrt{81}$; $-\sqrt{2}$

Définition :

On dit qu'un entier naturel a est un nombre pair, si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $a = 2k$.

On dit qu'un entier naturel b est un nombre impair, si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $b = 2k + 1$.

Exemples :

- 220 est un nombre pair car $220 = 2 \times k$ avec $k = 110$
- 2019 est un nombre impair car $2019 = 2 \times k + 1$ avec $k = 1009$
- Le nombre $6n + 10$ tel que $n \in \mathbb{N}$

est un nombre toujours pair car $6n + 10 = 2(3n + 5)$ avec $k = (3n + 5)$

Exercice 01 :

Etudier la parité des nombres suivants :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$2n + 4$; $4n + 2019$; $2n^2 + 6n + 3$.

Propriétés :

- La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.
- La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair.
- Le produit de deux nombres consécutifs est un nombre pair.

Exemples :

- L'entier $n(n + 1)$ est pair car il est produit de deux entiers consécutifs
- L'entier $(n + 5)(n + 6)$ est pair car il est produit de deux entiers consécutifs
- L'entier $(5n + 10)(5n + 11)$ est pair car il est produit de deux entiers consécutifs

Preuve de 3) :

n est un entier naturel donc n soit un nombre pair ou bien un nombre impair

Cas 1 :

Si n est pair alors : $n = 2k$ $avec$ $k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans $n^2 - 3n + 4$

$$n(n + 1) = 2k(2k + 1)$$
$$= 2p \ , avec \ \ p = k(2k + 1)$$

Donc $n(n + 1)$ est pair

Cas 2 :

Si n est impair alors : $n = 2k + 1$; $k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans $n^2 - 3n + 4$

$$n(n + 1) = (2k + 1)(2k + 1 + 1)$$
$$= (2k + 1)(2k + 2)$$
$$= 2(2k + 1)(k + 1)$$
$$= 2p \ , avec \ p = (2k + 1)(k + 1)$$

Donc $n(n + 1)$, est pair

Exercice 02 :

Étudier la parité des nombres :
n^2-3n+4 et n^2+3n+5 .

Solution de l'exercice 02 :

1) Étudier la parité des nombres :
n^2-3n+4 et n^2+3n+4 .

$1^{ère}$ méthode :

$n^2-3n+4=n^2+n-4n+4$
$=n(n+1)-4n+4$
$=2k-4n+4 \quad (*)$
$=2(k-2n+2)$
$=2k' \ avec \ k'=k-2n+2$

Donc n^2-3n+4 est pair

$(*)$ $n(n+1)$ est pair car il est produit de deux nombre consécutifs

$2^{ème}$ méthode : (Etude des cas)

n est un entier naturel donc n soit un nombre pair ou bien un nombre impair

Cas 1 :

Si n est pair alors : $n=2k \ avec \ k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans n^2-3n+4

$n^2-3n+4=(2k)^2-3\times 2k+4$
$=4k^2-6k+4$
$=2(2k^2-3k+2)$
$=2p \ ,avec \ p=2k^2-3k+2$

Donc n^2-3n+4 est pair

Cas 2 :

Si n est impair alors : $n=2k+1$; $k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans n^2-3n+4

$n^2-3n+4=(2k+1)^2-3\times(2k+1)+4$
$=4k^2+4k+1-6k-3+4$
$=4k^2-2k+2$
$=2(2k^2-k+1)$
$=2p \ ,avec \ p=2k^2-k+1$

Donc n^2-3n+4 est pair

La parité de n^2+3n+5

$1^{ère}$ méthode :

$n^2+3n+5=n^2+n+2n+5$
$=n(n+1)+2n+5$
$=2k+2n+4+1 \quad (*)$
$=2(k+n+2)+1$
$=2k'+1 \ avec \ k'=k+n+2$

Donc n^2+3n+5 est impair

$(*)$ $n(n+1)$ est pair car il est produit de deux nombre consécutifs

$2^{ème}$ méthode : (Etude des cas)

Cas 1 :

Si n est pair alors : $n=2k \ avec \ k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans n^2+3n+5

$n^2+3n+5=(2k)^2+3\times 2k+5$
$=4k^2+6k+4+1$
$=2(2k^2+3k+2)+1$
$=2p+1 \ ,avec \ p=2k^2+3k+2$

Donc n^2+3n+5 est pair

Cas 2 :

Si n est impair alors : $n=2k+1$; $k \in \mathbb{N}$

$n^2+3n+5=(2k+1)^2+3\times(2k+1)+5$
$=4k^2+4k+1+6k+3+5$
$=4k^2+10k+8+1$
$=2(2k^2+5k+4)+1$
$=2p+1 \ ,avec \ p=2k^2+5k+4$

Donc n^2+3n+5 est impair

II) Multiples d'un entier naturel :

Activité :

1)Déterminer tous les multiples de 6 et 9 qui sont inférieurs à 36.

2)Déterminer les multiples communs de et 6

Déterminer le plus petit commun multiple commun

Définition01 :

a $\in \mathbb{N}^*$ et b $\in \mathbb{N}^*$

On dit que a est un multiple de b, s'il existe k $\in \mathbb{N}$ tel que : $a=kb$.

Cours 1 : Ensemble $\mathbb{N}$ et notion d'arithmétique

Exercice 03 :

a ; b et c des entiers non nul

1) Monter que 9a+15b est un multiple de 3
2) Montrer que si a est un multiple de b alors a est un multiple de bc
3) Montrer que si a est un multiple de b et de c alors a est un multiple de a+b

Définitions 02 :

Le plus petit commun multiple de deux entiers naturels a et b est le plus petit multiple commun non nul de a et b, on le note généralement $PPCM(a;b)$ ou $a \vee b$.

III) Diviseurs d'un entier naturel :

Activité :

1. Déterminer tous les diviseurs de 30 et 70.
2. Quel est le plus grand commun diviseur de 30 et 70 ?

Définitions 01 :

$a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$

On dit que b est un diviseur de a , ou b divise par a , ou a est divisible par b s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $a = kb$.

EXEMPLE : 30 est diviseur de 120

Définitions 02

Le plus grand diviseur commun de a et b est le plus grand entier parmi les diviseurs communs des nombres a et b, on le note $PGCD(a;b)$ ou $\triangle(a;b)$ ou $a \wedge b$.

Exercice : Déterminer le $PGCD(6;12)$

Remarque :

Si a est un multiple de b alors b est un diviseur de a.

Exercice 04 :

On pose $a = 6n + 11$ et $b = 2n + 4$; $n \in \mathbb{N}$

1) Étudier la parité des nombres a et b.
2) En déduire la parité de nombre :
$c = (6n + 11)(-1)^b + (2n + 3)(-1)^a$
3) Montrer que le nombre $(a + 1)^2 + b^2$ est un multiple de 40 .

Solution de l'exercice 01 :

On pose $a = 6n + 11$ et $b = 2n + 4$; $n \in \mathbb{N}$

1) Étudier la parité des nombres a et b.

$a = 6n + 11$
$= 6n + 10 + 1$
$= 2(3n + 5) + 1$
$= 2k + 1$ avec $k = 3n + 5$

Donc a est un entier impair

$b = 2n + 4$
$= 2(n + 2)$
$= 2k' + 1$ avec $k' = n + 2$

Donc b est un entier pair

2) En déduire la parité de nombre :

$c = (6n + 11)(-1)^b + (2n + 3)(-1)^a$

On a b est un entier pair donc : $(-1)^b = 1$

Et a est impair donc $(-1)^a = -1$

Donc on remplace dans c on trouve que :

$c = (6n + 11)(-1)^b + (2n + 3)(-1)^a$
$= 6n + 11 - (2n + 3)$
$= 6n + 11 - 2n - 3$

(Critères de divisibilité par 2,3 ,5 et 9)

1) Un nombre est divisible par 2 lorsque le chiffre des unités est pair.
2) Un nombre est divisible par 5 lorsque le chiffre des unités est 0 ou 5.
3) Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 3.
4) Un nombre est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est un nombre multiple de 9.

Exemple : le nombre 124581 est divisible par 3 car al sommes des chiffre et 21 et 21 est un multiple de 3

Cours 1 : Ensemble $\mathbb{N}$ et notion d'arithmétique

Exercice 05:

1) Déterminer le chiffre x pour que le nombre 53x2 Soit divisible par 9.
2) Déterminer les valeurs de chiffre y pour que 532y soit divisible par 6

Solution de l'exercice 01 :

1) le nombre 53x2 est divisible par 9
Donc $5+3+x+2$ est un multiple de 9
Donc $10+x$ est un multiple de 9
$10+x=9$, donc $x=-1\notin\mathbb{N}$
Donc $10+x=18$ donc $x=8$
D'où le chiffre x pour que le nombre 53x2 Soit divisible par 9 est 8.

2) le nombre 532y est divisible par 6
Donc 532y est divisible par 2 et 3
Donc y est un chiffre pair
De plus le nombre $5+3+2+y$ est un multiple de 3 , c-à-dire le nombre $10+y$ est un multiple de 3
Donc $10+y=?$
Donc $10+y=12$
Donc $y=2$
ou bien : $10+y=18$ donc $y=8$
* les valeurs de chiffre y pour que 532y soit divisible par 6 sont 2 ou 8

VI) Nombres premiers :

Définitions :

Soit p un entier supérieur ou égale à 2
Un entier naturel p est dite premier, si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Exercice :

Trouver tous les nombres premiers inférieurs à 64.

Décomposition en facteurs premiers

Activité :

La décomposition en facteurs premiers :
$12=2\times6=2^2\times3.$
2 et 3 sont premiers, on ne peut pas décomposer plus

Théorème 01 :

Tout entier naturel non premier se décompose en un produit des facteurs premiers, cette décomposition est unique.

Théorème 02 :PGCD$(a;b)$

Le PGCD de deux entiers naturels a et b est le produit des facteurs premiers communs élevés à la plus petite puissance trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de a et b

Exemple : PGCD$(a;b)$

Soient :
$a=2^3\times3^2\times5$ et $b=2^2\times3^3\times7^2$
Alors : PGCD$(a;b)=2^2\times3^2$

Remarque :
Si PGCD$(a;b)=1$ on dit que a et b sont premiers entre eux

Théorème 03 : $PPCM(a;b)$

Le PPCM de deux entiers naturels a et b est le produit des facteurs premiers communs et non communs aux deux nombres, élevés à la plus grand puissance trouvés dans la décomposition de a et b.

Exemple ;$PPCM(a;b)$

Soient $a=2^3\times3^2\times5$ et $b=2^2\times3^3\times7^2$
Alors : $PPCM(a;b)=2^3\times3^3\times7^2\times5$

Cours 1 : Ensemble $\mathbb{N}$ et notion d'arithmétique

Méthode : Comment savoir qu'un nombre est premier

217 est-il un nombre premier ?

On a : $\sqrt{217} = 14,7309\ldots$ alors $14^2 < 217 < 15^2$.

Les nombres premiers inférieurs ou égales à 14 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13$.

Si l'un de ces nombres divise 217, alors 217 c'est un nombre composé. Sinon, 217 est premier.

On a 2, 3,5 ne divise 217 mais 7 divise 217

Alors 217 est un nombre composé.

Exercice 06

1) Vérifier que 337 est premier

2) Décomposer les nombres $a = 240$ et $b = 2022$

2) En déduire $\text{pgcd}(a;b)$ et $\text{ppcm}(a;b)$.

3) Simplifier $\sqrt{240 \times 2022}$

Solution de l'exercice 06 :

1)Vérifier que 337 est premier

$\sqrt{337} = 18,35\ldots$

Les nombres premiers inférieurs ou égales à 18 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13$;17

On a 2, 3, 5 ne divise pas 337

Avec calculatrice en teste la divisibilité de 337 par 7 ; 11 ; 13 ; 17

On trouve 7 ; 11 ; 13 ; 17 ne divise pas 337

Donc 337 et premier

2)Décomposer $a = 240$ et $b = 2022$

240	2	;	2022	2
120	2	;	1011	3
60	2	;	337	337
30	2	;	1	
15	3	;		
5	5	;		
1		;		

Donc : $a = 2^4 \times 3 \times 5$ et $b = 2 \times 3 \times 337$

2) En déduire $\text{pgcd}(a;b)$ et $\text{ppcm}(a;b)$.

$a = 2^4 \times 3 \times 5$ et $b = 2 \times 3 \times 337$

$\text{pgcd}(a;b) = 2 \times 3 = 6$

$\text{ppcm}(a;b) = 2^4 \times 3 \times 5 \times 337$

3) Simplifier $\sqrt{240 \times 2022}$

$$\begin{aligned}\sqrt{240 \times 2022} &= \sqrt{2^4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 337} \\ &= \sqrt{(2^2)^2 \times 3^2 \times 5 \times 2 \times 337} \\ &= 2 \times 3 \times \sqrt{5 \times 2 \times 337} \\ &= 6\sqrt{3370}\end{aligned}$$

Exercice 07

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$a = 7^{n+2} - 7^n$ et $b = 3.7^{n+1} + 5.7^n$

1) Montrer que a est multiple de 3 et b multiple de 13 .

2) Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a et b .

3) En déduire $pgcd(a;b)$ et $ppcm(a;b)$

Solution de l'exercice 07 :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$a = 7^{n+2} - 7^n$ et $b = 3.7^{n+1} + 5.7^n$

1) Montrer que a est multiple de 3 et b multiple de 13 .

$$\begin{aligned}a &= 7^{n+2} - 7^n \\ &= 7^n \times 7^2 - 7^n \\ &= 7^n(7^2 - 1) \\ &= 7^n \times 48 \\ &= 7^n \times 3 \times 16\end{aligned}$$

Donc est multiple de 3

$$\begin{aligned}b &= (3 \times 7^{n+1}) + (5 \times 7^n) \\ &= (3 \times 7^n \times 7) + (5 \times 7^n) \\ &= 7^n(3 \times 7 + 5) \\ &= 7^n \times 26 \\ &= 7^n \times 13 \times 2\end{aligned}$$

Donc b multiple de 13 .

2)Décomposer en produit de facteurs premiers les deux nombres a et b .

On a d'après la question précédente

$$\begin{aligned}a &= 7^n \times 3 \times 16 \\ &= 7^n \times 3 \times 2^4\end{aligned}$$

les nombres 7 ; 3 et 2 sont premiers

$b = 7^n \times 13 \times 2$

les nombres 7 ; 13 et 2 sont premiers

D'où $a = 7^n \times 3 \times 2^4$ et $b = 7^n \times 13 \times 2$

3) En déduire $pgcd(a;b)$ et $ppcm(a;b)$

$pgcd(a;b) = 7^n \times 2$

$ppcm(a;b) = 7^n \times 2^4 \times 13 \times 3$