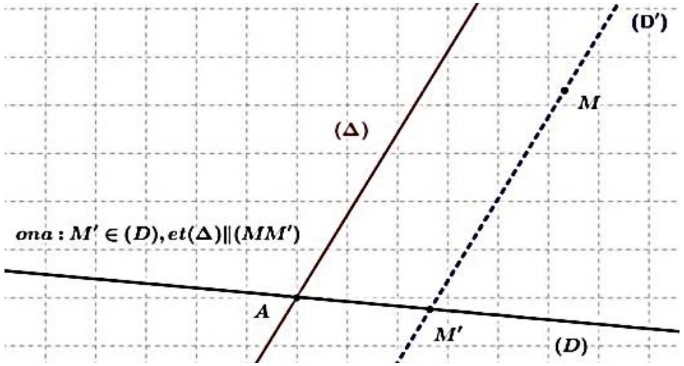
Cours 03
Projection dans le plan

A) Projection d'un point sur un droite parallèlement à une autre droite

(D) et (Δ) deux droites sécantes en un point A , et M un point du plan
La droite qui passe par M et parallèle à (Δ) coupe (D) en un point M'



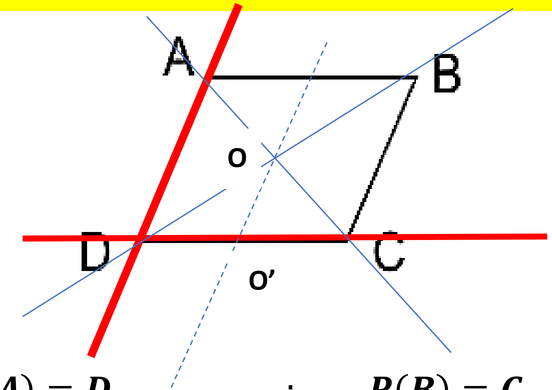
1) Définition :

Le point M' est appelé la projection du point M sur (D) parallèlement à (Δ)
On dit aussi que M' est l'image du point M par la projection P sur (D) parallèlement à (Δ) , et écrit $P(M) = M'$

Exercice 01

ABCD est un parallélogramme de centre O ; on considère P la projection sur (DC) parallèlement à (AD)
Déterminer
$P(A)$; $P(B)$; $P(C)$; $P(D)$ et $P(O)$

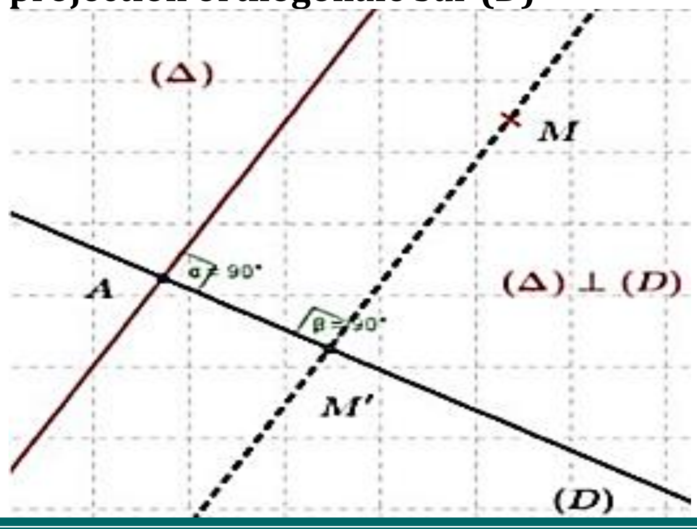
Solution



$P(A) = D$; $P(B) = C$
$P(C) = C$; $P(D) = D$
$P(O) = O'$, tel que O est le milieu du segment $[DC]$

2) Projection orthogonale

Si (D) et (Δ) sont orthogonales alors la projection sur (D) s'appelle la projection orthogonale sur (D)



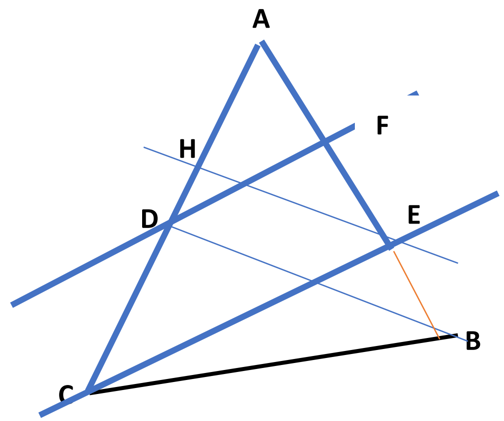
Exercice 02

ABC est un triangle
Le point D le projeté orthogonale de point B sur la droite (AC)
Le point E le projeté orthogonale de point C sur la droite (AB)
Le point F le projeté orthogonale de point D sur la droite (AB)
Le point H le projeté orthogonale de point E sur la droite (AC)

1) Faire une figure
2) Montrer que : $AE \times AD = AC \times AF$
3) Montrer que : $AE \times AD = AH \times AB$
4) En déduire que : $(BC)//(FH)$

Solution

1)



2) Considérons le triangle AEC

On a Le point E le projeté orthogonale de point C sur la droite (AB)

Donc $(EC) \perp (AB)$; $(*)$

Et Le point F le projeté orthogonale de point D sur la droite (AB)

Donc $(DF) \perp (AB)$; $(**)$

De $(*) et\ (**)$, on a $(EC)//(DF)$

Donc d'après théorème directe de THALES on a

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AD}$$

Donc : $AE \times AD = AC \times AF$

3) Considérons le triangle ABD

On a Le point D le projeté orthogonale de point B sur la droite (AC)

Donc $(BD) \perp (AC)$; $(*)$

Et Le point H le projeté orthogonale de point E sur la droite (AC)

Donc $(EH) \perp (AC)$; $(**)$

De $(*) et\ (**)$, on a $(EH)//(BD)$

Donc d'après théorème directe de THALES on a

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD}$$

Donc : $AE \times AD = AH \times AB$

4) En déduire que : $(BC)//(FH)$

On a : $AE \times AD = AC \times AF$

Et On a : $AE \times AD = AH \times AB$

Donc $AC \times AF = AH \times AB$

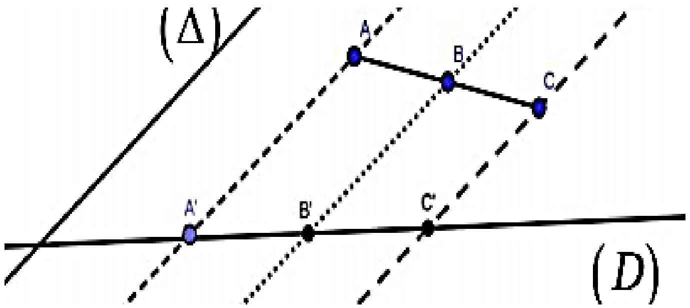
Donc $\frac{AF}{AB} = \frac{AH}{AC}$

Et les points A ; F et B Sont alignée de la même ordre que A ; H et C

Donc d'après théorème réciproque de THALES on a $(BC)//(FH)$

B) Théorème de THALES avec la projection

1) Théorème directe de THALES avec la projection



Si A' ; B' et C' sont respectivement les projetés de A ; B et C sur (D) parallèlement à (Δ) alors :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$

2) Version vectoriel THALES directe

Résultat :

Si A' ; B' et C' sont respectivement les projetés de A ; B et C et $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ avec k un réel

Alors $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{A'C'}$

On dit que la projection conserve l'alignement de trois points

Exercice 03

ABC est un triangle

Le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

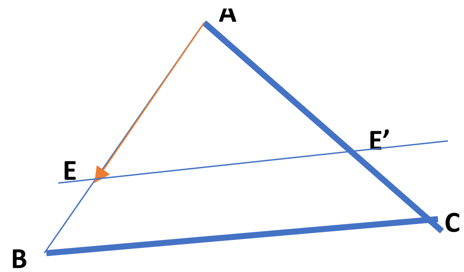
1) Construire le point E' le projeté de E sur la droite (AC) parallèlement à (BC)

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AE'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b) En déduire que les droites (EE') et (BC) sont parallèles

Solution

1)



2)a) Montrer que : $\overrightarrow{AE'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Soit P la projection sur la droite (AC) parallèlement à (BC)

On a : $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Et $P(A) = A$; $P(E) = E'$ et $P(B) = C$

Donc $\overrightarrow{AE'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Car la projection conserve l'alignement de trois points

b) En déduire que les droites (EE') et (BC) sont parallèles

$$\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AE'}$$
$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$
$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

Donc $\overrightarrow{EE'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

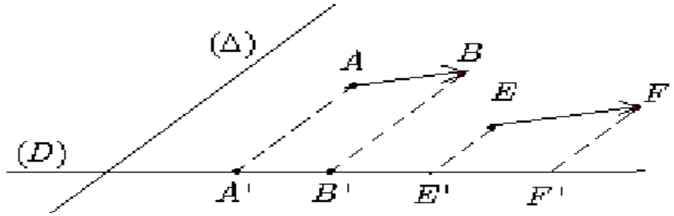
Donc les vecteurs $\overrightarrow{EE'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

Donc les droites (EE') et (BC) sont parallèles

3) Conservation du coefficient de colinéarité

Si A' ; B' ; E' et F' sont respectivement les projetés de A ; B ; E et F et $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{EF}$ avec k un réel

Alors $\overrightarrow{E'F'} = k\overrightarrow{A'B'}$



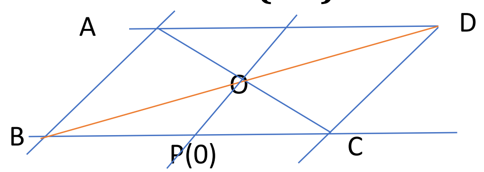
On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité

Résultat : (Conservation du milieu)

Si I est le milieu de segment $[AB]$

Alors le point P(I) est le milieu de segment $[A'B']$

<u>Exemple :</u> ABCD est un parallélogramme de centre O ; soit P la projection sur (BC) parallèlement à (AB)



On a P(A)=B et P(C)=C et O est le milieu de segment $[AC]$

Donc P(O) est le milieu du segment $[BC]$

Exercice 04

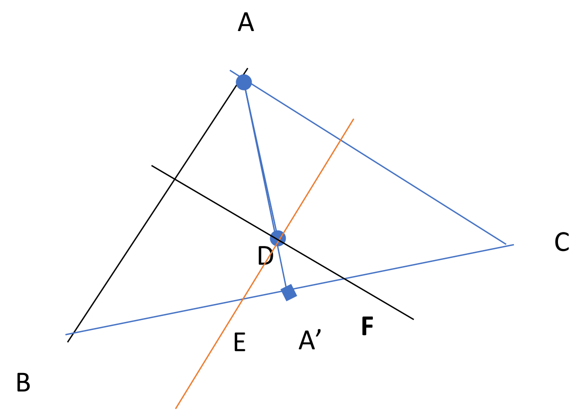
ABC est un triangle dans le plan
Et A' le milieu du segment $[BC]$

Soit le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$

1) **Construire E le projeté de D sur la droite (BC) parallèlement à (AB)**
2) **Construire F le projeté de D sur la droite (BC) parallèlement à (AC)**
3) **Montrer que : $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA'}$**
4) **En déduire que A' est le milieu du segment $[EF]$**

Solution

1)



3)Soit P_1 la projection sur la droite (BC) parallèlement à(AB)

On a : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$

Et $P_1(A) = B$; $P_1(A') = A'$ et $P_1(D) = E$

Donc $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA'}$

Car la projection conserve le coefficient de colinéarité

- Soit P_2 la projection sur la droite e (BC) parallèlement à (AC)

On a : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$

Et $P_2(C) = B$; $P(A') = A'$ et $P(D) = F$

Donc $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA'}$

Car la projection conserve le coefficient de colinéarité

4)On a A' le milieu du segment $[BC]$

Donc $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{A'C}$

Et on a $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA'}$

Donc $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{FC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A'C}$

Donc $BE = FC$

Et on a : $BE + EA' = FC + A'F$

Donc $EA' = A'F$

Et on a les points E ; A' et F sont alignés

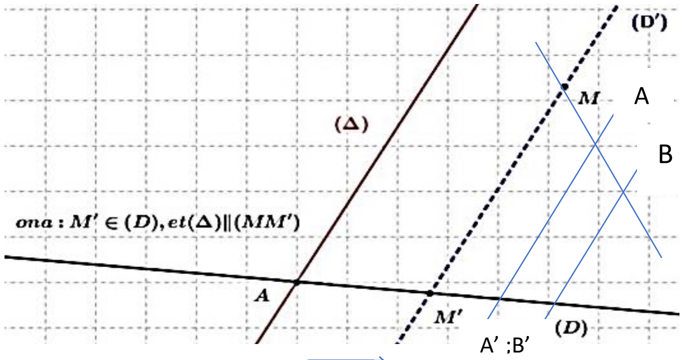
donc A' est le milieu du segment $[EF]$

4) Théorème réciproque de THALES avec la projection

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point A

Et soient A ; B deux points tel que

P(A)=A' ; P(B)=B' et M un point de la droite (AB)et M'un point de la droite(D)



Si $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'M'} = k\,\overrightarrow{A'B'}$

Alors P(M)=M'

Exercice 05

ABC est un triangle

Soient I et I' deux points tel que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

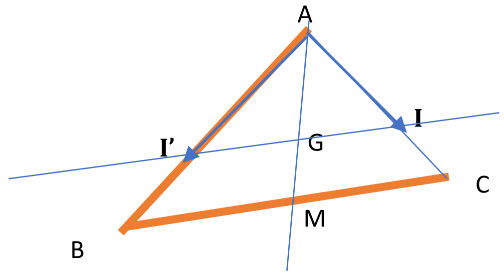
1) Montrer que I' est le projeté de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)
2) Soit M le milieu du segment $[BC]$

La droite (AM) coupe la droite (II') en G

a) Montrer que: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

b) En déduire que A ; G et M sont alignés

Solution



1) Montrer que I' est le projeté de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

Soit P la projection sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

On a : P(A)=B' ; P(C)=C

De plus $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc d'après théorème réciproque de THALES on a P(I)=I'

2)a) Soit P_1 la projection sur la droite (AM) parallèlement à (BC)

On a : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Et $P_1(A) = A$; $P_1(I) = G$ et $P_1(C) = M$

Donc $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

Car la projection conserve le coefficient de colinéarité

b) On a $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ *et* $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

Donc les points A ; G et M sont alignés