Formation Agadir	Devoir surveillé 02 Version (A)	WWW.FORMATIONAGADIR.COM TCS F

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

Barème	

Exercice 01 (6pt)

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i};\vec{j})$; on considère les points $A(5\,;0)$;$B(2\,;1)$ et $C(6\,;3)$

0.5 — **1)** a) Déterminer les cordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

0.5 — b) Calculer $det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$ et déduire que A ;B et C ne sont pas alignés

1 — c) Montrer que le triangle ABC et isocèle et rectangle en A

1 — **2)** a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

0.5 — b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) Passe par A est de vecteur directeur $\vec{U}(6;-2)$

0.5 — c) Montrer que les droites (AB) et (Δ) sont parallèles

3) Soient (D) et (D') deux droites telles que ; (D) : $\begin{cases} x = 2+5t \\ y = 1+t \end{cases}$; $(t \in IR)$

et $(D') : x + 2y + 3 = 0$

0.5 — a) Montrer que : $B \in (D)$ et $A \notin (D')$

0.5 — b) Montrer que les droites (D) et (D') sont sécantes en un point I

1 — c) Déterminer les coordonnées de points I

Exercice 02 (5.5pt)

Soient a et b deux réels tels que : $1 \leq a$ et $b \leq 2$ et $a - b = 3$

1 — **1)** Montrer que: $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(b-2)^2} = 4$

1 — **2)** Montrer que : $1 \leq a \leq 5$ et $-2 \leq b \leq 2$

1.5 — **3)** Donner un encadrement de $a - b$; $a(b-3)$ et $\frac{a}{b-3}$

1 — **4)** Montrer que $|a+b-7| + |a+b+1| = 8$

0.5 — **5)** Résoudre dans IR l'équation suivante : (E): $|2x+8| = 2$

0.5 — **6)** Résoudre dans IR l'inéquation suivante : (I): $|2x+8| < 2$

Exercice 03 (3.5 pt)

1 — **1)** Montrer que $\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$ tel que x un réel

0.5 — **2)** Montrer que $1 + \sqrt{1+x^2} > 2$

1 — **3)** Déduire que $\left|\sqrt{1+x^2} - 1\right| < \frac{1}{2}x^2$

1 — **4)** Déterminer une valeur approchée de nombre $\sqrt{1{,}0001}$ à 5×10^{-5} près

Exercice 04 (6pt)

1 — **1)** a)On pose $A = \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$; déterminer le singe de A

2 — b) Calculer A^2 , puis en déduire que que $A = -\sqrt{2}$

2) Soient a et b deux nombres réels telles que : $a + b = 2$ et $a^2 + b^2 = 8$

1.5 — a) Calculer la valeur de $a^3 + b^3$

1.5 — b) Calculer la valeur de $a^4 + b^4$ et $a^6 + b^6$

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

Correction d'exercice 01

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i};\vec{j})$; Soient les points $A(5\,;0)$;$B(2\,;1)$ et $C(6\,;3)$

1) a) Déterminer les cordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(2-5;1-0)$ donc $\overrightarrow{AB}(-3;1)$

$\overrightarrow{AC}(6-5;3-0)$ donc $\overrightarrow{AC}(1;3)$

b) Calculer $det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$ et déduire que A ;B et C ne sont pas alignés

$$det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\times 3 - 1\times 1 = -10 \neq 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

Donc les points A ;B et C ne sont pas alignés

c) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

$AB = \sqrt{(-3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$

$AC = \sqrt{(1)^2+(3)^2} = \sqrt{10}$

Donc le triangle ABC et isocèle en A

$BC = \sqrt{(6-2)^2+(3-1)^2} = \sqrt{20}$

$AB^2 + AC^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{10}^2 = \sqrt{10}^2 = BC^2$

Donc d' après théorème de PHITAGORE le triangle ABC est rectangle en A

2) a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

• A et B appartiennent à (AB) donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB)

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$. Donc $a = 1$ et $b = 3$.

Une équation cartésienne de (AB) est de la forme :

$x + 3y + c = 0.$

• $A\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ appartient à (AB) donc : $5 + 3\times 0 + c = 0$ donc $c = -5$.

Une équation cartésienne de (AB) est : $x + 3y - 5 = 0$

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) Passe par A est de vecteur directeur $\vec{U}(6;-2)$

$(\Delta) : \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = -2t \end{cases} ; (t \in IR)$

c) Montrer que les droites (AB) et (Δ) sont parallèles

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB)

$Et\ \vec{U}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ)

$$det(\overrightarrow{AB}\,;\vec{U}) = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\times(-2) - 6\times 1 = 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{U}$ sont colinéaires

Donc les droites (AB) et (Δ) sont parallèles

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

3) (D) et (D) deux droites telles que ; (D) : $\begin{cases} x = 2+5t \\ y = 1+t \end{cases}$ **;** $(t \in IR)$

et $(D') : x + 2y + 3 = 0$

a) Montrer que : B ∈ (D) et A ∉ (D')

$\begin{cases} x_B = 2+5t \\ y_B = 1+t \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2 = 2+5t \\ 1 = 1+t \end{cases}$ donc $\begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ *donc* $B \in (D)$

$x_A + 2y_A + 3 = 5 + 2 \times 0 + 3 = 8 \neq 0$ donc $A \notin (D')$

b) Montrer que les droites (D) et (D') sont sécantes en un point I

On a : $\vec{V}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D)

Et $\vec{V'}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D')

$det(\vec{V};\vec{V'}) = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times (1) - (-2) \times 1 = 7 \neq 0$

Donc les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ ne sont pas colinéaires

Donc les droites (D) et (D) sont sont pas parallèles

D'où les droites (D) et (D') sont sécantes en un point I

c) Déterminer les coordonnées de points I

Pour déterminer les coordonnées de points I on av résoudre de système suivant

$(S) : \begin{cases} x = 2+5t \\ y = 1+t \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2+5t \\ y = 1+t \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$ *donc* $2 + 5t + 2(1+t) + 3 = 0$

Donc $2 + 5t + 2 + 2t + 3 = 0$

Donc $7 + 7t = 0$; donc $7t = -7$

Donc $t = -1$

Donc $\begin{cases} x_I = 2 + 5 \times (-1) \\ y_I = 1 + (-1) \end{cases}$; Donc $\begin{cases} x_I = -3 \\ y_I = 0 \end{cases}$

Correction d'exercice 02

1) Montrer que : $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(b-2)^2} = 4$

$\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(b-2)^2} = |a-1| + |b-2|$

On a : $1 \leq a$ *donc* $0 \leq a - 1$

Donc : $|a-1| = a - 1$

On a : $b \leq 2$ *donc* $b - 2 \leq 0$

Donc : $|b-2| = 2 - b$

$\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(b-2)^2} = |a-1| + |b-2|$

$= a - 1 + 2 - b$

$= a - b + 1$
$= 3 + 1 = 4$

Formation Agadir	**Correction de devoir surveillé 02 Version (A)**	WWW.FORMATIONAGADIR.COM
Page 03		TCS F

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

1) Montrer que : $1 \leq a \leq 5$ et $-2 \leq b \leq 2$

On a : $1 \leq a$ *et* $a - b = 3$
Donc : $1 \leq a$ *et* $a = 3 + b$
Donc : $1 \leq 3 + b$
Donc : $1 - 3 \leq b$
Donc : $-2 \leq b$
Et on a : $b \leq 2$
Donc : $-2 \leq b \leq 2$
On a : $b \leq 2$ *et* $a - b = 3$
Donc : $b \leq 2$ *et* $b = a - 3$
Donc : $a - 3 \leq 2$
Donc : $a \leq 2 + 3$
Donc : $a \leq 5$
Et on a: $1 \leq a$
Donc : $1 \leq a \leq 5$

3)Donner un encadrement de $a - b$

On a $1 \leq a \leq 5$ et $-2 \leq b \leq 2$
Donc $-2 \leq -b \leq 2$
Donc $1 + (-2) \leq a + (-b) \leq 5 + 2$
Donc $-1 \leq a - b \leq 7$

Donner un encadrement de $a(b - 3)$

On a $1 \leq a \leq 5$ et $-5 \leq b - 3 \leq -1$
Donc $1 \leq -(b - 3) \leq 5$
Donc $1 \leq -(b - 3) \times a \leq 25$
Donc $-25 \leq a(b - 3) \leq -1$

Donner un encadrement $\frac{a}{b-3}$

On a $1 \leq a \leq 5$ et $-5 \leq b - 3 \leq -1$
Donc $-1 \leq \frac{1}{b-3} \leq -\frac{1}{5}$
Donc $\frac{1}{5} \leq -\frac{1}{b-3} \leq 1$
Donc $\frac{1}{5} \leq -\frac{1}{b-3} \times a \leq 5$
Donc $-5 - \frac{a}{b-3} \leq -\frac{1}{5}$

4)Montrer que $|a + b - 7| + |a + b + 1| = 8$

On a : $1 \leq a \leq 5$ et $-2 \leq b \leq 2$
Donc : $-1 \leq a + b \leq 7$
Donc $0 \leq a + b + 1$ et $a + b - 7 \leq 0$
Donc :
$|a + b - 7| + |a + b + 1|$
$= a + b + 1 - (a + b - 7)$

$= a + b + 1 - a - b + 7$
$= 8$

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

5)Résoudre dans IR l'équation suivante : (E): $|2x+8| = 2$

$|x| = r$ ssi $x = r$ ou $x = -r$

$|2x+8| = 2$ si $2x + 8 = 2$ ou $2x + 8 = -2$

c.à.d $2x = 2 - 8$ ou $2x = -2 - 8$

c.à.d $2x = -6$ ou $2x = -10$

c.à.d $x = -\frac{6}{2}$ ou $x = -\frac{10}{2}$

ssi $x = -3$ ou $x = -5$

Donc : $S = \{-3; -5\}$

6)Résoudre dans IR l'inéquation suivante : (I): $|2x+8| < 2$

$|x| < r$ ssi $-r < x < r$

$|2x+8| < 2$ ssi $-2 < 2x + 8 < 2$

ssi $-10 < 2x < -6$

ssi $-5 < x < -3$

Donc : $S =]-5; -3[$

Correction d'exercice 03

Soit x un réel

1) Montrer que $\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}^2 - 1^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1+x^2-1}{1+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

2) Montrer que $1 + \sqrt{1+x^2} \geq 2$

On a : $x^2 \geq 0$ *donc* $x^2 + 1 \geq 1$

donc $\sqrt{1+x^2} \geq 1$

donc $1 + \sqrt{1+x^2} \geq 2$

3) Déduire que : $\left|\sqrt{1+x^2} - 1\right| < \frac{1}{2}x^2$

On a : $\sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$

Et on a : $1 + \sqrt{1+x^2} \geq 2$

Donc : $\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{2}$

Donc : $\frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x^2}{2}$

Donc : $\sqrt{1+x^2} - 1 \leq \frac{x^2}{2}$

Donc : $\left|\sqrt{1+x^2}-1\right| \leq \frac{1}{2}x^2$

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

4) Déterminer une valeur approchée de nombre $\sqrt{1,0001}$ à la précision 5×10^{-5}

On a : $(*)$ $\left|\sqrt{1+x^2}-1\right| \leq \frac{1}{2}x^2$

On prend $x=0,01$ donc $x^2=0,0001$

Et : $\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\times 0,0001=5\times 10^{-5}$

On remplace dans $(*)$ *on trouve*

$\left|\sqrt{1,0001}-1\right| \leq 5\times 10^{-5}$

Donc 1 une valeur approchée de nombre $\sqrt{1,0001}$ à la précision 5×10^{-5}

Correction d'exercice 04

1)a) On a : $4-\sqrt{7}<4+\sqrt{7}$

Donc : $\sqrt{4-\sqrt{7}}<\sqrt{4+\sqrt{7}}$

Donc : $\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}<0$

Donc : $A<0$

2ème méthode : (Conjuguée)

$$\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}$$

$$A=\frac{\sqrt{4-\sqrt{7}}^2-\sqrt{4+\sqrt{7}}^2}{\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}$$

$$=\frac{4-\sqrt{7}-4-\sqrt{7}}{\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}$$

$$=\frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}<0$$

b) Montrer que $A=-\sqrt{2}$

$$A^2=\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$$

$$=4-\sqrt{7}-2\sqrt{4-\sqrt{7}}\sqrt{4+\sqrt{7}}+4+\sqrt{7}$$

$$=8-2\sqrt{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}$$

$$=8-2\sqrt{16-7}$$

$$=8-2\sqrt{9}$$

$$=8-6$$

$$=2$$

Donc $A^2=2$ *donc* $A=\sqrt{2}$ *ou* $A=-\sqrt{2}$

et comme $A < 0$ alors $A = -\sqrt{2}$

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

2) a et b deux réels tels que :

$a + b = 2$ et $a^2 + b^2 = 8$

a) Calculons d'abord la valeur de $a \times b$

$On\ a :\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$Donc :\ 2ab + a^2 + b^2 = (a+b)^2$

$Donc :\ 2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2)$

$$Donc :\ ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2}$$

$$Donc :\ ab = \frac{(2)^2 - (8)}{2}$$

$Donc :\ ab = -2$

En déduire alors la valeur de $a^3 + b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$= 2(8+2)$

$= 20$

b) Calculer $a^4 + b^4$, puis $a^6 + b^6$

$On\ a :\ (a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

$Donc :\ (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = a^4 + b^4$

$Donc :\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2$

$= (8)^2 - 2(-2)^2$

$= 56$

$On\ a :\ (a^3 + b^3)^2 = a^6 + 2a^3b^3 + b^6$

$Donc :\ (a^3 + b^3)^2 - 2a^3b^3 = a^6 + b^6$

$Donc :\ a^6 + b^6 = (a^3 + b^3)^2 - 2(ab)^3$

$= (20)^2 - 2(-2)^3$

$= 400 + 16$

$= 416$