Formation Agadir	Devoir 01 (D)	www.formationagadir.com
Mathématique	1 heurs et 50 min	TRONC COMMUN SCIENCES

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

Barème	
(5pt)	**Exercice 01 :**
1	1) Vérifier que 337 est premier
2	2) Décomposer les nombres $a = 240$ et $b = 2022$ en produit de facteurs premiers.
1	3) En déduire $pgcd(a; b)$ $et\ ppcm(a; b)$.
1	4) Simplifier $\sqrt{240 \times 2022}$
(7pt)	**Exercice 02 :**
2	1) a)Soit; $n \in \mathbb{N}$; étudier la parité des nombres : $n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$
1	b) Développer et réduire l'expression suivant :$(n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4)$
1	c) En déduire que $n^4 - n^2 + 16$ est un multiple du 4
1.5	2) a)Déterminer les entiers naturels $x\ et\ y$ vérifiant $x^2 - y^2 = 51$.
1.5	b)Déterminer tous les couples (a ;b) d'entiers tels que: $a^2 - b^2 = 7344$ et $a \wedge b = 12$
(4pt)	**Exercice 03 :**
	Soient ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$
1	1) a) Construire les points M et N tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$
1	b) Montrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles
	2) Soit J le milieu de segment $[MN]$
1	a) Montrer que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AI}$
1	b) En déduire que A ; I et J sont alignés
(4pt)	**Exercice 04 :**
	Soient ABC est un triangle dans le plan Et A' le milieu du segment $[BC]$
	Et le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$
1	1) Construire E le projeté de D sur la droite (BC) parallèlement à (AB)
1	2) Construire F le projeté de D sur la droite (BC) parallèlement à (AC)
1	3) Montrer que : $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA'}$
1	4) En déduire que A' est le milieu du segment $[EF]$

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

Barème

Exercice 01 :

1) Vérifier que 337 est premier

2) Décomposer les nombres $a = 240$ et $b = 2022$ en produit de facteurs premiers.

3) En déduire $pgcd(a;b)$ et $ppcm(a;b)$.

4) Simplifier $\sqrt{240 \times 2022}$

Solution de l'exercice 01 :

1)Vérifier que 337 est premier

$\sqrt{337} = 18,35 \ldots$

Les nombres premiers inférieurs ou égales à 18 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13;17$

On a 2, 3, 5 ne divise pas 337

Avec calculatrice en teste la divisibilité de 337 par 7 ; 11 ; 13 ; 17

On trouve 7 ; 11 ; 13 ; 17 ne divise pas 337

Donc 337 et premier

2)Décomposer $a = 240$ et $b = 2022$

240	2	;	2022	2
120	2	;	1011	3
60	2	;	337	337
30	2	;	1	
15	3	;		
5	5	;		
1		;		

Donc : $a = 2^4 \times 3 \times 5$ *et* $b = 2 \times 3 \times 337$

2) En déduire $pgcd(a;b)$ et $ppcm(a;b)$.

$a = 2^4 \times 3 \times 5 \quad et \quad b = 2 \times 3 \times 337$

$pgcd(a;b) = 2 \times 3 = 6$

$ppcm(a;b) = 2^4 \times 3 \times 5 \times 337$

3) Simplifier $\sqrt{240 \times 2022}$

$$\sqrt{240 \times 2022} = \sqrt{2^4 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 337}$$

$$= \sqrt{(2^2)^2 \times 3^2 \times 5 \times 2 \times 337}$$

$$= 2 \times 3 \times \sqrt{5 \times 2 \times 337}$$

$$= 6\sqrt{3370}$$

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

Barème

Exercice 02 :

1) a)Soit; $n \in \mathbb{N}$; étudier la parité des nombres : $n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$

b) Développer et réduire l'expression suivant :$(n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4)$

c) En déduire que $n^4 - n^2 + 16$ est un multiple du 4

2) a)Déterminer les entiers naturels x et y vérifiant $x^2 - y^2 = 51$.

b)Déterminer tous les couples (a ;b) d'entiers tels que:

$a^2 - b^2 = 7344$ et $a \wedge b = 12$

Solution de l'exercice 02 :

1) a)Étudier la parité des nombres :

$n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$.

1ère méthode :

$$n^2 - 3n + 4 = n^2 + n - 4n + 4$$
$$= n(n+1) - 4n + 4$$
$$= 2k - 4n + 4 \quad (*)$$
$$= 2(k - 2n + 2)$$
$$= 2k' \ \ avec \ \ k' = k - 2n + 2$$

Donc $n^2 - 3n + 4$ est pair

$(*)$ $n(n+1)$ est pair car il est produit de deux nombre consécutifs

2ème méthode : (Etude des cas)

n est un entier naturel donc n soit un nombre pair ou bien un nombre impair

Cas 1 :

Si n est pair alors : $n = 2k \ \ avec \ \ k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans $n^2 - 3n + 4$

$$n^2 - 3n + 4 = (2k)^2 - 3 \times 2k + 4$$
$$= 4k^2 - 6k + 4$$
$$= 2(2k^2 - 3k + 2)$$
$$= 2p \ \ ,avec \ \ p = 2k^2 - 3k + 2$$

Donc $n^2 - 3n + 4$ est pair

Cas 2 :

Si n est impair alors : $n = 2k + 1$; $k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans $n^2 - 3n + 4$

$$n^2 - 3n + 4 = (2k+1)^2 - 3 \times (2k+1) + 4$$
$$= 4k^2 + 4k + 1 - 6k - 3 + 4$$
$$= 4k^2 - 2k + 2$$
$$= 2(2k^2 - k + 1)$$
$$= 2p \ \ ,avec \ \ p = 2k^2 - k + 1$$

Donc $n^2 - 3n + 4$ est pair

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

Barème

La parité de n^2+3n+4

1ère méthode :

$$n^2+3n+4=n^2+n+2n+4$$
$$=n(n+1)+2n+4$$
$$=2k+2n+4 \quad (*)$$
$$=2(k+n+2)$$
$$=2k' \;\; avec \;\; k'=k+n+2$$

Donc n^2+3n+4 est pair

$(*)$ $n(n+1)$ est pair car il est produit de deux nombre consécutifs

2ème méthode : (Etude des cas)

Cas 1 :

Si n est pair alors : $n=2k \;\; avec \;\; k \in \mathbb{N}$

On remplace n dans n^2+3n+4

$$n^2+3n+4=(2k)^2+3\times 2k+4$$
$$=4k^2+6k+4$$
$$=2(2k^2+3k+2)$$
$$=2p \;\; ,avec \;\; p=2k^2+3k+2$$

Donc n^2+3n+4 est pair

Cas 2 :

Si n est impair alors : $n=2k+1 \;;\; k \in \mathbb{N}$

$$n^2+3n+4=(2k+1)^2+3\times(2k+1)+4$$
$$=4k^2+4k+1+6k+3+4$$
$$=4k^2+10k+8$$
$$=2(2k^2+5k+4)$$
$$=2p \;\; ,avec \;\; p=2k^2+5k+4$$

Donc n^2+3n+4 est pair

b) Développer et réduire l'expression suivant :$(n^2-3n+4)(n^2+3n+4)$; $n \in \mathbb{N}$

$$(n^2-3n+4)(n^2+3n+4)$$
$$=(n^2+4-3n)(n^2+4+3n)$$
$$=(n^2+4)^2-(3n)^2$$
$$=n^4+8n^2+16-9n^2$$
$$=n^4-n^2+16$$

c) En déduire que n^4-n^2+16 est un multiple du 4

On a d'après la question 1)

$n^2-3n+4=2k$ et $n^2-3n+4=2p$

Donc :

$$n^4-n^2+16=(n^2-3n+4)(n^2+3n+4)$$
$$=2k\times 2p$$
$$=4k\,p$$

Donc n^4-n^2+16 est un multiple du 4

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

Barème

2) a)Déterminer les entiers naturels x et y vérifiant (E): $x^2 - y^2 = 51$

$51 = 17 \times 3$ *ou* $51 = 3 \times 17$

ou $51 = 1 \times 51$ *ou* $51 = 51 \times 1$

On a $x + y$ *et* $x - y$ sont de même parité

Et on a $x - y \leq x + y$

Donc : $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 17 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 2x = 20 & ; (L_1 + L_2) \\ x + y = 17 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x = 10 \\ x + y = 17 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x = 10 \\ 10 + y = 17 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x = 10 \\ y = 7 \end{cases}$

ou bien $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 51 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} 2x = 52 & ; (L_1 + L_2) \\ x + y = 51 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x = 26 \\ x + y = 51 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x = 26 \\ 26 + y = 51 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x = 26 \\ y = 25 \end{cases}$

Donc les couples $(x ; y)$qui vérifient : (E)

sont $(10 ; 7)$ et $(26 ; 25)$

b) Déterminer tous les couples (a ;b) d'entiers tels que:

$$a^2 - b^2 = 7344 \text{ et } a \wedge b = 12$$

On a : $a \wedge b = 12$

Donc 12 divise a et 12 divise b

Donc $a = 12k$ *avec k un entier*

et $b = 12\,p$ *avec p un entier*

On remplace dans $a^2 - b^2 = 7344$ on trouve : $(12\,k)^2 - (12p)^2 = 7344$

Donc $144\,k^2 - 144\,p^2 = 7344$

Donc $144\,(k^2 - p^2) = 7344$

Donc $k^2 - p^2 = \frac{7344}{144}$

Donc $k^2 - p^2 = 51$

Et on a d'prés 1) les couples $(k ; p)$qui vérifient $k^2 - p^2 = 51$

sont $(10 ; 7)$ et $(26 ; 25)$

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

Barème

Pour $k = 10$ on a $a = 12k = 12 \times 10 = 120$
Pour $p = 7$ on a $b = 12p = 12 \times 7 = 84$
Pour $k = 26$ on a $a = 12k = 12 \times 26 = 312$
Pour $p = 25$ on a $b = 12p = 12 \times 25 = 300$
les couples $(k\,;p)$qui vérifient

$$a^2 - b^2 = 7344 \text{ et } a \wedge b = 12$$

Sont $(120\,;84)$ et $(312\,;100)$

Exercice 03 :

Soient ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$

1) a) Construire les points M et N tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

b) Montrer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles

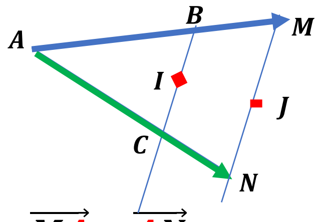
2) Soit J le milieu de segment $[MN]$

c) Montrer que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AI}$

d) En déduire que A ; I et J sont alignés

Solution

1) a)



b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

Donc $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

Donc (BC) et (MN) sont parallèles

2)a) Montrer que $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AI}$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

Barème

On a I le milieu de segment $[BC]$

Donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$

Donc $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\times 2\overrightarrow{AI}$

$=3\overrightarrow{AI}$

b) En déduire que A ; I et J sont alignés

On a $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AI}$

Donc $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JN}=3\overrightarrow{AI}$; $(*)$

Et on a J le milieu de segment $[MN]$

Donc $\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{JN}=\vec{0}$

Donc $(*)$ devient $2\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AI}$

Donc $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires

Donc les points A ; I et J sont alignés

Exercice 04 :

Soient ABC est un triangle dans le plan

Et le point A' le milieu du segment $[BC]$

Et le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$

1) Construire E le projeté de D sur la droite (BC) parallèlement à (AB)

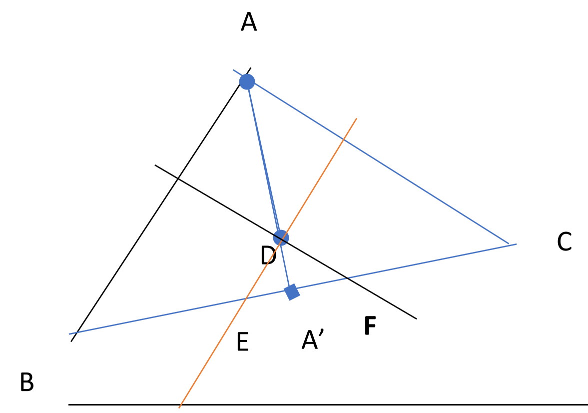
2) Construire F le projeté de D sur la droite (BC) parallèlement à (AC)

3) Montrer que : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{CF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA'}$

4) En déduire que A' est le milieu du segment $[EF]$

Solution

1)



NB : Il sera tenu compte la rédaction des réponses

Barème

3)Soit P_1 la projection sur la droite (BC) parallèlement à(AB)

On a : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$

Et $P_1(A) = B$; $P_1(A') = A'$ et $P_1(D) = E$

Donc $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA'}$

Car la projection conserve le coefficient de colinéarité

- Soit P_2 la projection sur la droite e (BC) parallèlement à (AC)

On a : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$

Et $P_2(C) = B$; $P(A') = A'$ et $P(D) = F$

Donc $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA'}$

4)On a A' le milieu du segment $[BC]$

Donc $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{A'C}$

Et on a $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA'}$

Donc $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{FC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A'C}$

Donc $BE = FC$

Et on a : $BE + EA' = FC + A'F$

Donc $EA' = A'F$

Et on a les points E ; $A' et\ F$ sont alignés donc A' est le milieu du segment $[EF]$