ثانوية	تحضير درس : الحساب المثلثي جذع مشترك	المـــــــادة : الريــاضيــات إعداد وإنجاز :

- الفئة المستـهدفـة :
-
-
-

التوجيهات التربوية:

.

I) Unités de mesure des angles :

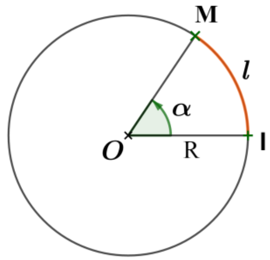
1) Activité

Soit $(\mathcal{C})$un cercle de centre O et de rayon R et soient I et Mdeux points du cercle $(\mathcal{C})$ et α est la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$:

(C'est-à-dire $\widehat{IOM} = \alpha°$ et $0 \leq \alpha \leq 360$)

- Déterminons l la longueur de l'arc IM :

$(\mathcal{C})$



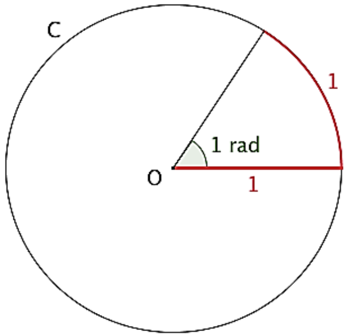
On sait quel es proportionnelle à la mesure a de l'angle $\widehat{IOM}$

On a le périmètre du cercle $(\mathcal{C})$est $P = 2\pi R$

Donc : $\begin{array}{l} 2\pi R \rightarrow 360° \\ l \rightarrow \alpha° \end{array}$ alors

$$l = \frac{\alpha \times 2\pi R}{360} = \frac{\alpha\pi R}{180}$$

2) Définition :



Soit $(\mathcal{C})$un cercle de centre O et de rayon 1.

soient I et M deux points de$(\mathcal{C})$.

La mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ en radians est la longueur de l'arc $\widehat{IM}$

3) Proportionnalité des unités de mesure :

✓ Il existe une autre unité de mesure des angles qui est le grade , noté gr ; la mesure d'un angle plat en grades est 200gr .

✓ Si α , β et γ, sont les mesures respectives d'un angle géométrique en degrés, radians et en grades, alors:

$$\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi} = \frac{\gamma}{200}$$

Exemples :

✶ La mesure d'un angle platen degrés est 180°, alors sa mesure en radians est $\beta = \frac{180 \times \pi}{180}$ c'est-à-dire :

$\beta = \pi$ rad (et sa mesure en grades est 200gr)

✶ Si la mesure d'un angle en degrés est ° , alors sa mesure en radians est $\beta = \frac{30\times\pi}{180}$c'est-à-dire : $\beta = \frac{\pi}{6}$rad

Et on a sa mesure en grades est $\gamma = \frac{30}{180} \times 200$ c'est-à-dire :

$$\gamma = \frac{100}{3}\text{ gr} \simeq 33,33\text{gr}$$

✶ Si la mesure d'un angle en radians est $\frac{\pi}{3}$ rad ,alors sa mesure est

$$\alpha = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} \times 180 = 60°$$

4) Correspondance degrés et radians

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Exercice 01

On utilisant la relation $\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi}$, compléter le tableau suivant :

Mesure en degrés β	33°		150°		80°	
Mesure en radians α		$\frac{3\pi}{8}rad$		$\frac{\pi}{10}rad$		$\frac{\pi}{9}$

Solution de l'exercice 01

1) $\beta = 33 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{60}$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{8} \times \frac{180}{\pi} = 67,5°$

3) $\beta = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$; 4) $\alpha = \frac{\pi}{10} \times \frac{180}{\pi} = 18°$

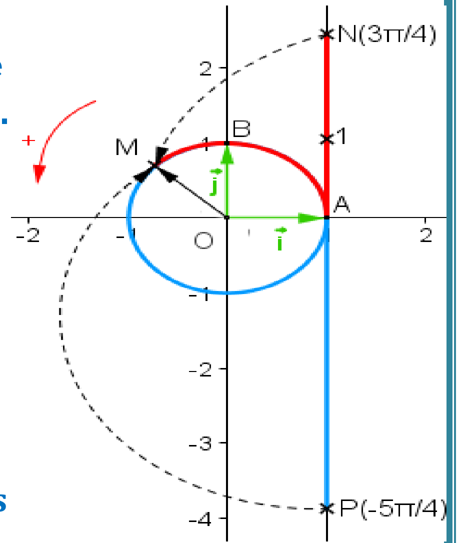
5) $\beta = 80 \times \frac{\pi}{180} = \frac{8\pi}{9}$; 6) $\alpha = \frac{\pi}{9} \times \frac{180}{\pi} = 20°$

Mesure en degrés β	33°	67,5°	150°	18°	80°	20°
Mesure en radians α	$\frac{11\pi}{60}$	$\frac{3\pi}{8}rad$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}rad$	$\frac{8\pi}{9}$	$\frac{\pi}{9}$

II- Cercle trigonométrique-Abscisses curvilignes d'un point

Activité :

A plusieurs points de la droite orientée correspondre un même point du cercle.
La droite orientée peut s'enrouler plusieurs fois autour du cercle dans un sens et dans l'autre.



- Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{4}$ correspondent tous les deux au point M.

En effet : $\frac{3\pi}{4}-2\pi=-\frac{5\pi}{4}$

- On pourrait poursuivre le processus effectuant deux tours successifs.

Ainsi, les points d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{19\pi}{4}$ correspondent au point M.

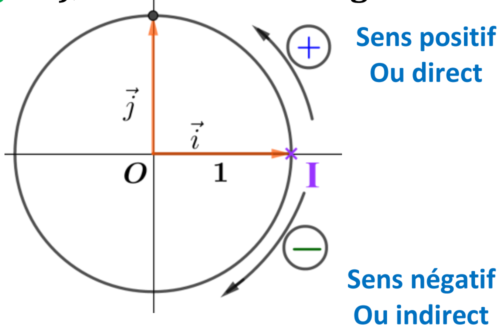
En effet : $\frac{3\pi}{4}+4\pi=\frac{19\pi}{4}$.

1) Cercle trigonométrique :

Définition :

Le plan est muni d'un repère orthonormé$(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.
On appelle **cercle trigonométrique** le cercle orienté de centre O et de rayon 1. Sur ce cercle, on définit une origine I et deux sens :

- ✶ Le sens direct(ou sens positif), est le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- ✶ Le sens indirect (ou sens négatif), est le sens des aiguilles d'une montre.



2) Abscisses curvilignes d'un point d'un Cercle trigonométrique :

Définitions :

Soit $(\mathcal{C})$un cercle **trigonométrique** de centre O, d'origine I.
Soit x un nombre réel.

- ✓ Dans le cas où $x\ \geq 0$, on considère le point M de$(\mathcal{C})$ tel que la mesure en radians de la longueur de l'arc IM est x lors du déplacement sur $(\mathcal{C})$ dans le sens positif.
- ✓ Dans le cas où $x\ < 0$, on considère le point M de $(\mathcal{C})$ tel que la mesure en radians de la longueur de l'arc IM est $-$x lors du déplacement sur $(\mathcal{C})$ dans le sens négatif.
- ✓ Dans les deux cas x s'appelle abscisse curviligne du point M sur $(\mathcal{C})$ et on écrit $M(x)$.
- ✓ Si x est une abscisse curviligne du point M sur$(\mathcal{C})$, alors $x+k(2\pi)$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, est une abscisse curviligne de M.
- ✓ Si $\in\,]-\pi,\pi]$, on dit que x est **l'abscisse curviligne principale** du point M . L'abscisse curviligne principale est unique.

Exemple :

Une mesure d'un angle orienté est $\frac{7\pi}{4}$.D'autres mesures sont : $\frac{7\pi}{4}-2\pi$; $\frac{7\pi}{4}-4\pi$; $\frac{7\pi}{4}-6\pi$; ...donc : $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{17\pi}{4}$; ...
Donc $-\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle orienté car c'est la seule comprise entre $-\pi$ exclu et π.

Exercice 02

1) Déterminer l'abscisse principale du point $M\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$:
2) Représenter sur le cercle trigonométrique les points A,B,C,D ; E et F d'abscisses curvilignes respectives $\frac{\pi}{3}$, $\frac{-\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{-4\pi}{3}$

Solution de l'exercice 02

1) **Déterminons l'abscisse principale du point $M\left(\frac{-11\pi}{6}\right)$:**

On a $\frac{-11\pi}{6}\notin\,]-\pi,\pi]$ donc $\frac{-11\pi}{6}$ n'est pas l'abscisse curviligne principale de M.

✶ **$1^{ère}$ méthode :**

On a $\frac{-11\pi}{6}=\frac{\pi-12\pi}{6}=\frac{\pi}{6}-2\pi$ donc $\frac{\pi}{6}$ est aussi uneabscisse curviligne du point M

Puisque $\frac{\pi}{6}\in\,]-\pi,\pi]$,alors $\frac{\pi}{6}$ estl'abscisse curviligne principale du point M.

✶ **$2^{ème}$ méthode :** Soit α l'abscisse curviligne principale du point M, alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\frac{-11\pi}{6}=\alpha+k(2\pi)\ avec\ -\pi<\alpha\leq\pi$

C'est-à-dire : $\alpha=\frac{-11\pi}{6}-2k\pi\ ,\quad -\pi<\frac{-11\pi}{6}-2k\pi\leq\pi\quad et\quad k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $\alpha=\frac{-11\pi}{6}-2k\pi\ ,\quad -1+\frac{11}{6}<-2k\leq 1+\frac{11}{6}\quad et\quad k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $\alpha=\frac{-11\pi}{6}-2k\pi\ ,\quad \frac{5}{6}<-2k\leq\frac{17}{6}\quad et\quad k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $\alpha=\frac{-11\pi}{6}-2k\pi\ ,\quad \frac{-17}{12}<k\leq\frac{-5}{12}\quad et\quad k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $\alpha=\frac{-11\pi}{6}-2k\pi\ ,\quad -1,41<k\leq-0,41\quad et\quad k\in\mathbb{Z}$

Or $k\in\mathbb{Z}$ donc$k=-1$, et par suite $\alpha=\frac{-11\pi}{6}-2\times(-1)\pi=\frac{\pi}{6}$

2) Représentons sur le cercle trigonométrique les points A,B,C,D et E d'abscisses curvilignes respectives $\frac{\pi}{3}$, $\frac{-\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{-4\pi}{3}$

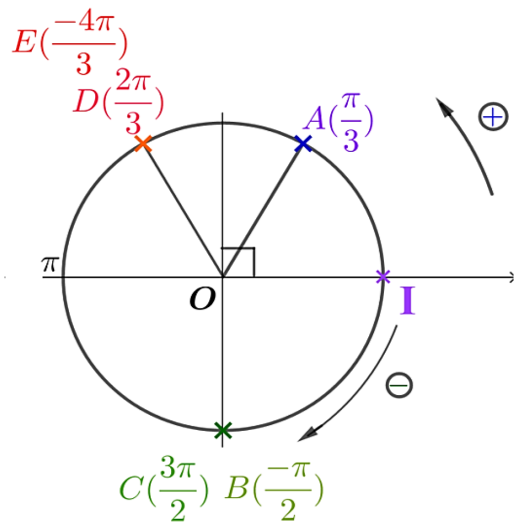
- On a $\widehat{IOA}=\frac{\pi}{3}rad=60°$
- Noter que : $\widehat{IOB}=\frac{\pi}{2}rad=90°$
- On a : $\frac{3\pi}{2}=\frac{4\pi-\pi}{2}=2\pi-\frac{\pi}{2}$

Donc $-\frac{\pi}{2}$ est aussi une abscisse curviligne du point C ,d'où C est confondu avec B.

- On a : $\widehat{IOD}=\frac{2\pi}{3}rad=120°$

On a : $\frac{-4\pi}{3}=\frac{-6\pi+2\pi}{3}=-2\pi+\frac{2\pi}{3}$

Donc $\frac{2\pi}{3}$ est aussi une abscisse curviligne du point E , alors E et D sont confondus



Exercice 03

1) Donner la mesure principale de l'angle $\frac{27\pi}{4}$.
2) Placer sur le cercle trigonométrique, le point M tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{9\pi}{4}$ rad.
3) Placer sur le cercle trigonométrique, le point N tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{ON})$ mesure $\frac{8\pi}{3}$ rad.

Solution de l'exercice 03

1) On choisit un multiple de 4 proche de 27, soit 28 :

$$\frac{27\pi}{4}=\frac{28\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=7\pi-\frac{\pi}{4}$$

- Dans 7ρ, on fait apparaître un multiple de 2π, soit 6π :

$$\frac{27\pi}{4}=6\pi+\pi-\frac{\pi}{4}=6\pi+\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=6\pi+\frac{3\pi}{4}$$

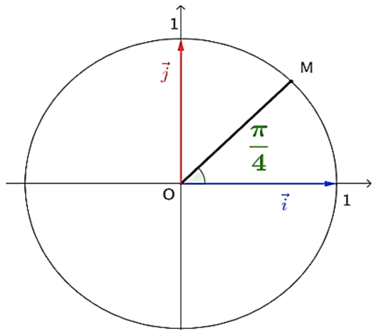
6π correspond à 3 tours entiers.

$\frac{3\pi}{4}$ est bien compris entre -π exclu et π.

La mesure principale de $\frac{27\pi}{4}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

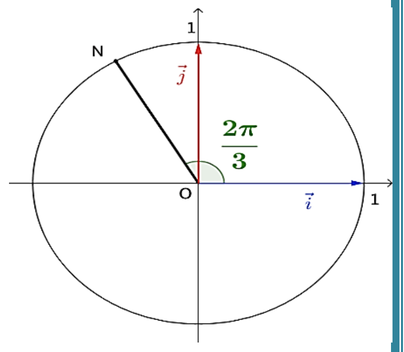
2) $\frac{9\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=2\pi+\frac{\pi}{4}$

Le point M se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{\pi}{4}$ rad.



3) $\frac{8\pi}{3}=\frac{6\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=2\pi+\frac{2\pi}{3}$

Le point N se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{ON})$ mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad.



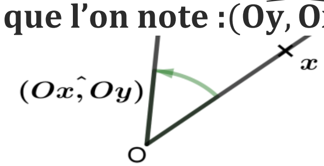
III) Angle orienté

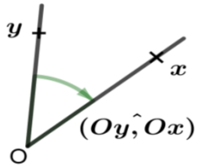
1) Angle orienté de deux demi-droites ayant même origine et se mesures :

Définition 01 :

Soient $[Ox)$et $[Oy)$ deux **demi-droites ayant même origine O.**

- Le couple $([Ox);\ [Oy))$ détermine un angle orienté deux demi-droites que l'on note :$(\widehat{Ox, Oy})$
- Le couple $([Oy);\ [Ox))$ détermine un angle orienté deux demi-droites que l'on note :$(\widehat{Oy, Ox})$



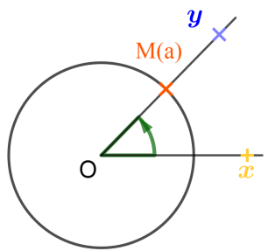


Définition 02 :

Soit$(\widehat{Ox, Oy})$angle orienté deux demi-droites de même origine O.

Soit $(\mathcal{C})$un cercle **trigonométrique** de centre O.

Soit a une abscisse curviligne du point Msur $(\mathcal{C})$. (Voir la figure)



- ✶ Le nombre réel a est appelé mesure de l'angle orienté $(\widehat{Ox, Oy})$.
- ✶ On sait que $a + k(2\pi)$, où $k \in \mathbb{Z}$ est aussi une abscisse curviligne du point M .Ainsi $a + k(2\pi)$, où $k \in \mathbb{Z}$, est aussi une mesure de l'angle orienté $(\widehat{Ox, Oy})$.
- ✶ Si on note a l'une de ces mesures par $(\overline{Ox, Oy})$, on peut écrire : $(\overline{Ox, Oy}) = a + k(2\pi)$, où $k \in \mathbb{Z}$

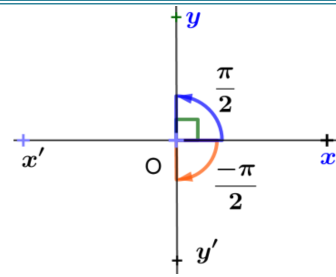
Remarque :

Parmi les mesures d'un angle orienté de deux demi-droites, il existe une mesure unique qui appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ appelée **mesure principale** de cet angle orienté.

Exemples :

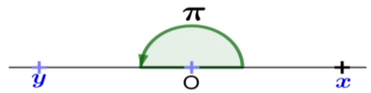
4) Sur la figure ci-contre : $(x'x) \perp (y'y)$

On a : $\begin{cases} (\overline{Ox, Oy}) = \frac{\pi}{2} + k(2\pi), \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ (\overline{Ox, Oy'}) = -\frac{\pi}{2} + k(2\pi), \text{où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$



5) On a $(\overline{Ox, Ox}) = 0 + k(2\pi) = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

6) On a $(\overline{Ox, Oy}) = \pi + k(2\pi)$, où $k \in \mathbb{Z}$



7) On a $(\overline{Oy, Ox}) = -\pi + k(2\pi)$, où $k \in \mathbb{Z}$

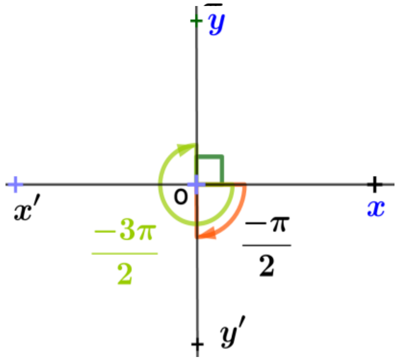
8) On a $(\overline{Ox, Oy}) = \frac{-3\pi}{2} + k(2\pi)$, où $k \in \mathbb{Z}$

pour $= 1$, on trouve : $\frac{-3\pi}{2} + 1 \times (2\pi) = \frac{\pi}{2}$

donc $\frac{\pi}{2}$est aussi une mesure de l'angle orienté$(\widehat{Ox, Oy})$.

On peut donc écrire

$(\overline{Ox, Oy}) = \frac{\pi}{2} + k(2\pi)$; $(k \in \mathbb{Z})$

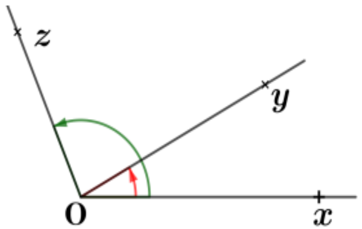


Propriétés :

Soient $[Ox)$et $[Oy)$et $[Oz)$ trois **demi-droites de même origine O.**

On a :

- $(\overline{Ox, Ox}) = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $(\overline{Oy, Ox}) = -(\overline{Ox, Oy}) + k(2\pi) \ (k \in \mathbb{Z})$
- $(\overline{Ox, Oy}) + (\overline{Oy, Oz}) = (\overline{Ox, Oz}) + k(2\pi) \ (k \in \mathbb{Z})$



Cette relation s'appelle relation de Chasles pour les mesures d'angles orientés.

Exercice 04

Soient $(\widehat{Ox,Oy})$ et $(\widehat{Oy,Oz})$ deux angles orientés de mesures principales respectives $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminons la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oz})$.

Solution de l'exercice 04

D'après la relation de Chasles pour les mesures d'angles orientés, on a :

$$\overline{(Ox,Oz)} = \overline{(Ox,Oy)} + \overline{(Oy,Oz)} + k(2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$= \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + k(2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc : $\overline{(Ox,Oz)} = \dfrac{17\pi}{12} + k(2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$

Donc $\frac{17\pi}{12}$ est une abscisse curviligne de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oz})$

Or $\frac{17\pi}{12} \notin]-\pi,\pi]$ (car $\frac{17\pi}{12} > \pi$)

Alors $\frac{17\pi}{12}$ n'est pas mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oz})$

✶ **1ère méthode :** On a : $\frac{17\pi}{12} = \frac{24\pi-7\pi}{12} = 2\pi - \frac{7\pi}{12}$

Donc la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oz})$ est $-\frac{7\pi}{12}$.

✶ **2ème méthode :**

Soit α la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oz})$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\frac{17\pi}{12} = \alpha + k(2\pi)$ et $-\pi < \alpha \leq \pi$

Donc $-\pi < \frac{17\pi}{12} - k(2\pi) \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Equivaut à : $-1 - \frac{17}{12} < -2k \leq 1 - \frac{17}{12}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $-\frac{29}{12} < -2k \leq -\frac{5}{12}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $\frac{5}{24} < k \leq \frac{29}{24}$ et $k \in \mathbb{Z}$

Équivaut à : $0,2 < k \leq 1,2$ et $k \in \mathbb{Z}$

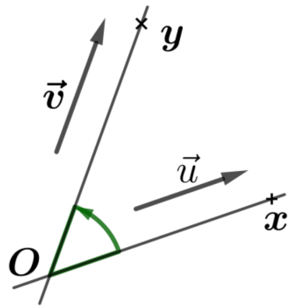
Donc $k = 1$, d'où $\alpha = \frac{17\pi}{12} - 1 \times 2\pi = -\frac{7\pi}{12}$

✓ **Angle orienté de deux vecteurs et ses mesures :**

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et O un point du plan.

On considère les deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ telles que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $[Ox)$ et $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $[Oy)$.



✓ L'angle orienté des deux vecteurs déterminé par le couple $(\vec{u},\vec{v})$ est l'angle orienté $(\widehat{Ox,Oy})$, on le note $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

✓ Les mesures de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ sont les mesures de $(\widehat{Ox,Oy})$ et sont notées $\overline{(\vec{u},\vec{v})}$.

✓ Si on note a l'une de ces mesures par $\overline{(\vec{u},\vec{v})}$, on peut écrire :

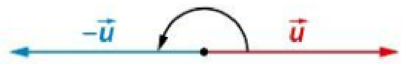
$$\overline{(\vec{u},\vec{v})} = a + k(2\pi), \text{ où } k \in \mathbb{Z} \text{ ou bien } \overline{(\vec{u},\vec{v})} \equiv a[2\pi]$$

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls ,on a :

✓ $\overline{(\vec{u},\vec{u})} = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

✓ $\overline{(\vec{u},-\vec{u})} = \pi + k(2\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$

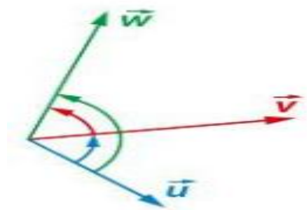


✓ $\overline{(\vec{v},\vec{u})} = -\overline{(\vec{u},\vec{v})} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

✓ $\overline{(-\vec{u},-\vec{v})} = \overline{(\vec{u},\vec{v})} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

✓ $\overline{(-\vec{u},\vec{v})} = \overline{(\vec{u},\vec{v})} + \pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

✓ $\overline{(\vec{u},\vec{v})} + \overline{(\vec{v},\vec{w})} = \overline{(\vec{u},\vec{w})} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$



Exercice 05

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\overline{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Déterminer : $\overline{(-\vec{u},\vec{v})}$; $\overline{(-\vec{u},-\vec{v})}$; $\overline{(\vec{u},-\vec{v})}$; $\overline{(\vec{v},-\vec{u})}$

Solution de l'exercice 05

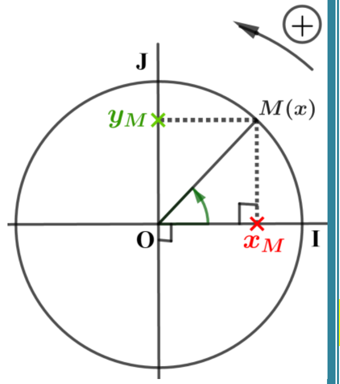
On a : $\overline{(-\vec{u},\vec{v})} \equiv \overline{(\vec{u},\vec{v})} + \pi[2\pi]$ *donc* $\overline{(-\vec{u},\vec{v})} \equiv \frac{\pi}{3} + \pi[2\pi]$

On a : $\overline{(-\vec{u},-\vec{v})} \equiv \overline{(\vec{u},\vec{v})}[2\pi]$ *donc* $\overline{(-\vec{u},-\vec{v})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

VI) Rapports trigonométriques d'un nombre réel :

1) Cosinus et sinus d'un nombre réel :

Définition :



Soient $(\mathcal{C})$ un cercle **trigonométrique** d'origine I, de centre O et J un point de $(\mathcal{C})$ tel que $\frac{\pi}{2}$ soit la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Soit x un nombre réel , on considère le point M de $(\mathcal{C})$ dont x l'une des abscisses curvilignes.

- L'abscisse x_M du point M, dans le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$, est appelée **cosinus** de x et on écrit $\cos x = x_M$.
- L'ordonnée y_M du point M, dans le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$, est appelée **sinus** de x et on écrit $\sin x = y_M$.

Propriétés :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- ✶ $-1 \leq \cos x \leq 1$ *et* $-1 \leq \sin x \leq 1$
- ✶ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (c'est-à-dire $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$)

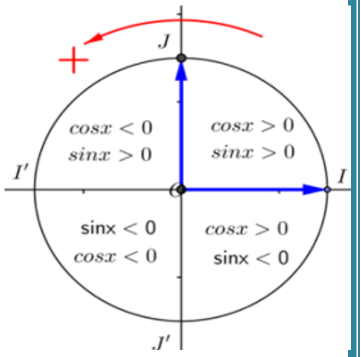
Remarques :

- $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$
- $|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$
- Tableau des angles remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

- **Tableau de singes de $\cos x$ *et* $\sin x$ où $x \in]-\pi, \pi]$:**

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\sin x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0



Exercice 06

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = \frac{3}{4}$; Calculer $\cos x$.

2) Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $-\pi \leq y \leq -\frac{\pi}{2}$ et $\sin y = -\frac{2}{5}$; Calculons $\cos y$.

Solution de l'exercice 06

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = \frac{3}{4}$; Calculons $\cos x$.

On sait que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$;

Donc $\cos^2 x = 1 - \frac{3^2}{4^2} = \frac{16-9}{16} = \frac{7}{16}$

C'est-à-dire : $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ *ou* $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

Or $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ alors $\cos x \geq 0$

D'où $\cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$

2) Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $-\pi \leq y \leq -\frac{\pi}{2}$ et $\sin y = -\frac{2}{5}$;Calculons $\cos y$.

On sait que : pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$

Donc $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$;

Donc $\cos^2 y = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$

C'est-à-dire : $\cos y = \frac{\sqrt{21}}{5}$ *ou* $\cos y = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

Puisque $-\pi \leq y \leq -\frac{\pi}{2}$ alors $\cos y \leq 0$

D'où $\cos y = -\frac{\sqrt{21}}{4}$

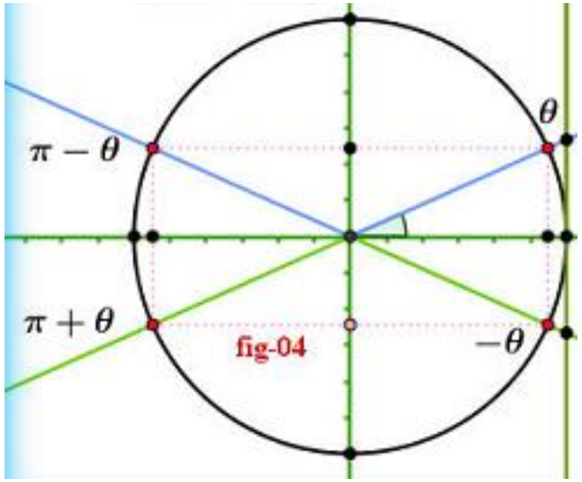
Relation trigonométrique :

Propriété 01

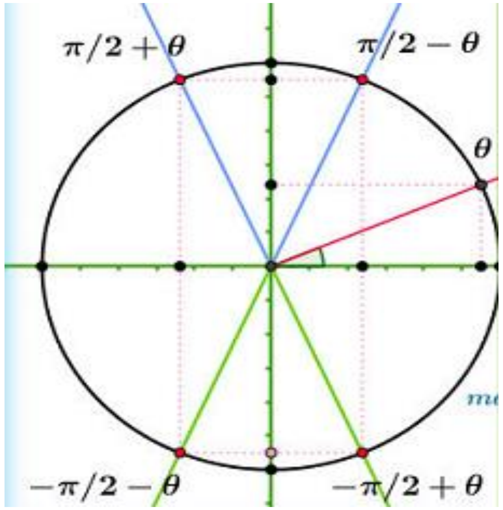
Soient $\theta \in \mathbb{R}$

A partir de cercle trigonométrique

- $cos(\theta + 2k\pi) = cos(\theta)$; $k \in \mathbb{Z}$
- $sin(\theta + 2k\pi) = sin(\theta)$; $k \in \mathbb{Z}$



- $cos(-\theta) = cos(\theta)$
- $sin(-\theta) = -sin(\theta)$
- $sin(\pi - \theta) = sin(\theta)$
- $cos(\pi - \theta) = -cos(\theta)$
- $tan(\pi - \theta) = -tan(\theta)$
- $sin(\pi + \theta) = -sin(\theta)$
- $cos(\pi + \theta) = -cos(\theta)$



Propriété 01

Soient $\theta \in \mathbb{R}$

- $sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cos\theta$
- $cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sin\theta$
- $sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = cos\theta$
- $cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -sin\theta$

Exercice 07

1) Calculer les rapports trigonométriques des nombres réels suivants : 9π ; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{-4\pi}{3}$

2) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = sin\left(\frac{\pi}{13}\right) + sin\left(\frac{3\pi}{13}\right) + sin\left(\frac{14\pi}{13}\right) + sin\left(\frac{16\pi}{13}\right)$$

$$B = cos(2022\pi) + cos(2023\pi) + 2cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$C = sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right) + sin^2\left(\frac{3\pi}{11}\right) + sin^2\left(\frac{17\pi}{22}\right) + sin^2\left(\frac{9\pi}{22}\right)$$

Solution de l'exercice 07

1) Calculer les rapports trigonométriques de 9π ; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{-4\pi}{3}$

- ✓ *On a :* $9\pi = \pi + 4 \times 2\pi$ *donc :*

  $\cos(9\pi) = \cos(\pi + 4 \times 2\pi) = \cos\pi = -1$ et

  $\sin(9\pi) = \sin(\pi + 4 \times 2\pi) = \sin\pi = 0$

- ✓ $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (car $\cos(-x) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$)

- $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(car $\sin(-x) = -sin\ x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$)

- ✓ *On a :* $\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi + 2\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi$

Donc : $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin(\pi) = 0$

(car $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ pour tout x de $\mathbb{R}$)

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \cos(\pi) = -1$

(Car $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ pour tout x de $\mathbb{R}$)

- ✓ *On a :* $\frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$

Donc : $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

✓ On a : $\frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi+\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$

Donc : $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

(car $\begin{cases} \cos(-x) = \cos\ x \\ \cos(\pi + x) = -\cos x \end{cases}$)

$$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(Car $\begin{cases} \sin(-x) = -\sin\ x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$)

2) **Simplifier les expressions suivantes**

$A = \sin\left(\frac{\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{14\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{16\pi}{13}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{13\pi+\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{13\pi+3\pi}{13}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{13}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{13}\right) + \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{13}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{13}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{13}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{13}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{13}\right)$

$= 0$

$B = \cos(2022\pi) + \cos(2023\pi) + 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

$B = \cos(0) + \cos(\pi) + 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{7\pi+\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{7\pi-\pi}{7}\right)$

$B = 1 - 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$

$B = 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$B = 0$

$C = \sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \sin^2\left(\frac{17\pi}{22}\right) + \sin^2\left(\frac{9\pi}{22}\right)$

$C = \sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi+6\pi}{22}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi-2\pi}{22}\right)$

$C = \sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{22} + \frac{6\pi}{22}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{22} - \frac{2\pi}{22}\right)$

$C = \sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{11}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{11}\right)$

$C = \sin^2\left(\frac{\pi}{11}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{11}\right)$

$= 1 + 1$

$= 2$

Exercice 08

1) **Déterminer** $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\frac{55\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

2) **Soit** $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ **tel que** $\sin(x) = \frac{4}{5}$ **; caluler** $\sin(x)$

Solution de l'exercice 08

1) **Déterminer** $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; $\cos\left(\frac{55\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

➢ $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

➢ $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}/2$

➢ $\cos\left(\frac{55\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{54\pi+\pi}{3}\right) = \cos\left(18\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1/2$

➢ $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1/2$

1) **Soit** $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ **tel que** $\sin(x) = \frac{4}{5}$ **; caluler** $\sin(x)$ **et** $\tan(x)$

On a : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ donc : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Donc : $\cos^2 x = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$ Donc : $\cos^2 x = \frac{9}{25}$

Donc : $\cos x = \frac{3}{5}$ ou $\cos x = -\frac{3}{5}$

Et on a : $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ donc $\cos x < 0$

$$Donc\ \cos x = -\frac{3}{5}$$

Fonction tangente :

Définition :

Soit x un nombre réel différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi$ *pour tout* $k\in\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$)

Le nombre réel $\frac{\sin x}{\cos x}$ s'appelle tangente de $x$et s'écrit $\tan x$c'est-à-dire : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

la fonction qui à chaque réel x associe sa tangente, est appelée fonction tangente et se note tan.

Interprétation géométrique du nombre $tanx$.

Activité :

1) Soit $(\mathcal{C})$ un cercle trigonométrique de centre O.

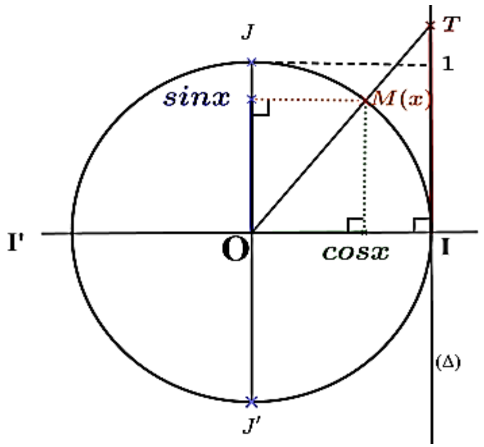
Le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ est un repère orthonormé.

Montrer que : $IT=\tan x$

2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$ on a :

$tan(-x)=-\tan x$;

$\tan(x+\pi)=\tan x$; $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$



Propriétés :

Soit x un nombre réel différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

- $\tan(x+2k\pi)=\tan x$ avec $k\in\mathbb{Z}$
- $\tan(-x)=-\tan x$; $\tan(x+\pi)=\tan x$
- $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$; $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$; $x\neq k\pi$

Remarque :

Tableau des angles remarquables:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

- $\tan(x+k\pi)=\tan x$ *pour tout* $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 10

1) Calculer $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

2) Simplifier les expressions suivantes :

$$A=tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)+tan\left(\frac{4\pi}{7}\right)+tan\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$B=cos\left(\frac{\pi}{7}\right)sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+tan\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right)$$

Solution de l'exercice 10

1) Calculons $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)$:

2) On a $\frac{11\pi}{6}=\frac{-\pi+12\pi}{6}=\frac{-\pi}{6}+2\pi$

Donc $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{-\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) Calculons $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$: On a : $\frac{3\pi}{4}=\frac{4\pi-\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$

Donc $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$$A=tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)+tan\left(\frac{4\pi}{7}\right)+tan\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$A=tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)+tan\left(\frac{7\pi-3\pi}{7}\right)+tan\left(\frac{7\pi-\pi}{7}\right)$$

$$=tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)+tan\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+tan\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$$

$$=tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)-tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)-tan\left(\frac{\pi}{7}\right)=0$$

$$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right)$$

$$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{7\pi-2\pi}{14}\right)\right)$$

$$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)\right)$$

$$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)$$

$$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)$$

$$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)$$

$$B=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)=1$$

IV) Equations et inéquations trigonométrique fondamentales :

1) Equations du type $\cos x = a$ et inéquations $\cos x \leq a$ ou $\cos x \geq a$

a) Equations du type $\cos x = a$:

Propriété :

On considère l'équation : $\cos x = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Soit S l'ensemble des solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.

- Si $|a| > 1$ (c'est-à-dire $a > 1$ ou $a < -1$), alors : $S = \emptyset$.
- Si $a = 1$, alors : $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
- Si $a = -1$, alors : $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
- Si $-1 < a < 1$, alors il existe un nombre réel α de $]0;\pi[$ tel que $\cos\alpha = a$ et on a :
  $S = \{-\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque :

On cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\alpha)$ d'où :

$\cos(x) = a$ équivaut à : $\cos(x) = \cos(\alpha)$

équivaut à : $x = \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 11

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos x = \frac{1}{2}$

2) Résoudre dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ l'équation (E) : $\cos x = \frac{1}{2}$

Solution de l'exercice 11

1)Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos x = \frac{1}{2}$

On a $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Equivaut à : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

D'où l'ensemble des solutions de l'equation (E) est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2)Résolvons dans l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ l'équation (E) : $\cos x = \frac{1}{2}$

Les solutions de l'équation (E) dans $[-2\pi; 2\pi]$ sont de la forme :

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ou } \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } (k \in \mathbb{Z})$$

Donc $-2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ ou $-2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$

- $-2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ équivaut à : $-2 + \frac{1}{3} \leq 2k \leq 2 + \frac{1}{3}$
  équivaut à : $-\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{7}{6}$

Donc : $k = 0$ ou $k = 1$ (car $k \in \mathbb{Z}$)

Si $k = 0$ alors $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 0 = -\frac{\pi}{3}$

Si $k = 1$ alors $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$

Donc : $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$ sont des solutions de (E) dans $[-2\pi; 2\pi]$.

- $-2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ équivaut à : $-2 - \frac{1}{3} \leq 2k \leq 2 - \frac{1}{3}$

  équivaut à : $-\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{5}{6}$

  C'est-à-dire : $k = -1$ ou $k = 0$ (car $k \in \mathbb{Z}$)

Si $k = -1$ alors $\frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$

Si $k = 0$ alors $\frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 0 = \frac{\pi}{3}$

Donc : $-\frac{5\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont des solutions de (E) dans $[-2\pi; 2\pi]$.

Et par suite l'ensemble des solutions de (E) dans $[-2\pi; 2\pi]$ est :

$S = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$

b) Inéquationsdu type $\cos x \leq a$ ou $\cos x \geq a$:

Exemples 01 :

Résolvons dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ l'inéquation (I): $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

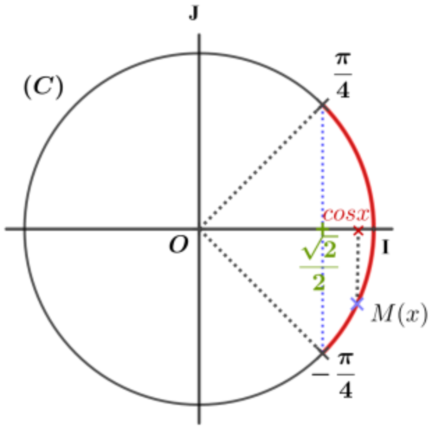
1)Résolvons dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$ l'équation (E) : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Et par suite les solutions de (E) dans $[-2\pi ; 2\pi]$ est : $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$

2) En représente les solutions sur le cercle trigonométrique :

L'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses curviligne des points $M(x)$ representés sur l'arc rouge du cercle trigonométrique (C).



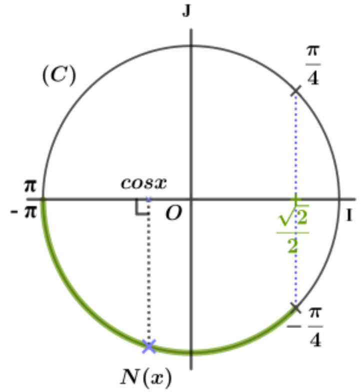
3) Donc l'ensemble des solutions sur $[-\pi; \pi]$ de (I) est : $S = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

Exemples 02 :

Résolvons dans l'intervalle $[-\pi; 0]$ l'inéquation (I_2): $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des abscisses curviligne des points $N(x)$ representés sur l'arc vert du cercle (C)

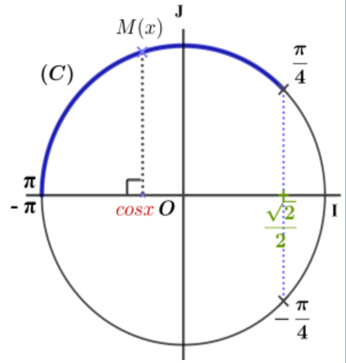
D'ou l'ensemble de solutions sur $[-\pi; 0]$ de (I_2) est $S = \left[-\pi; -\frac{\pi}{4}\right[$



Exemples 03 :

Résolvons dans l'intervalle $[0; \pi]$ l'inéquation (I_2): $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

L'ensemble des solutions de l'inéquation se lit donc sur le cercle trigonométrique c'est-à-dire : $S = \left]\frac{\pi}{4}; \pi\right]$

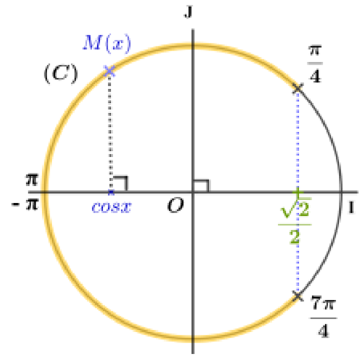


Exemples 04:

Résolvons dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'inéquation (I_2): $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

On a les solutions de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0; 2\pi]$sont: $\frac{\pi}{4}$ *et* $\frac{7\pi}{4}$

Par lecture graphique, sur $[0; 2\pi]$ l'ensemble des solutions de l'inéquation Est : $S = \left]\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right[$



2) Equations du type $\sin x = a$ et inéquations $\sin x \leq a$ ou $\sin x \geq a$

a) Equations du type $\sin x = a$:

Propriété :

On considère l'équation : $\sin x = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Soit S l'ensemble de solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.

- ✶ Si $|a| > 1$ (c'est-à-dire $a > 1$ ou $a < -1$), alors :$S = \emptyset$.
- ✶ Si $a = 1$, alors :$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- ✶ Si $a = -1$, alors :$S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- ✶ Si $-1 < a < 1$, alors il existe un nombre réel α de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin \alpha = a$ et on a :

$$S = \{\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

Remarque :

On cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \sin(\alpha)$ d'où :

$\sin(x) = a$ équivaut à: $\sin(x) = \sin(\alpha)$

équivaut à : $x = \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 12

1)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sin x = \frac{1}{2}$

2)Résoudre dans l'intervalle $[0; 4\pi]$ l'équation (E) : $\sin x = \frac{1}{2}$

Solution de l'exercice 12

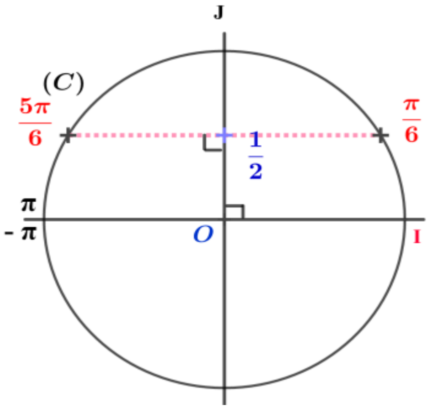
1)Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\sin x = \frac{1}{2}$

On sait que :$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Equivaut à : $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Equivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$



D'où l'ensemble de solutions de (E) dans $\mathbb{R}$ est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2)Résolvons dans $[0; 4\pi]$ l'équation (E) : $\sin x = \frac{1}{2}$

Les solutions de l'équation (E) dans $[0; 4\pi]$ donc :

$$0 \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 4\pi ;\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } ;\ 0 \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq 4\pi ;\ k \in \mathbb{Z}$$

- $0 \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 4\pi$ équivaut à : $-\frac{1}{6} \leq 2k \leq 4 - \frac{1}{6}$

  équivaut à : $-\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{23}{12}$

Donc $k = 0$ ou $k = 1$ car $k \in \mathbb{Z}$

Si $k = 0$, alors $\frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{6}$

Si $k = 1$, alors $\frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$

Donc : $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{13\pi}{6}$ sont des solutions de (E) dans $[0; 4\pi]$.

- $0 \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq 4\pi$ équivaut à : $-\frac{5}{6} \leq 2k \leq 4 - \frac{5}{6}$

  équivaut à : $-\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{19}{12}$

Donc :$k = 0$ ou $k = 1$ car $k \in \mathbb{Z}$

Si $k = 0$, alors $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 0 = \frac{5\pi}{6}$

Si $k = 1$, alors $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$

Donc: $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{17\pi}{6}$ sont des solutions de (E) dans $[0; 4\pi]$.

D'où l'ensemble des solutions de (E) dans $[0; 4\pi]$ est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right\}$$

b) Inéquationsdu type $\sin x \leq a$ ou $\sin x \geq a$:

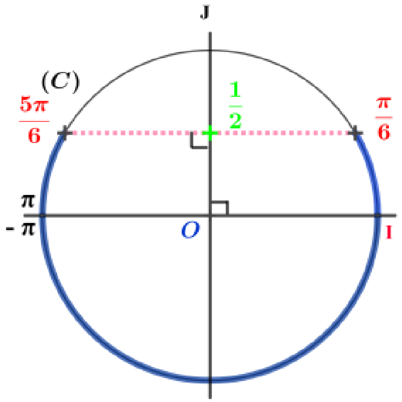
Exemples 01 :

Résolvons dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$
l'inéquation (I_1): $\sin x \leq \frac{1}{2}$

Les solutions de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$

dans $[-\pi;\pi]$ sont

$$\frac{\pi}{6} \text{ et } \frac{5\pi}{6}$$



À partir de la figure ci-contre, on déduit que l'ensemble des solutions dans $[-\pi;\pi]$ de (I_1) est :

$$S = \left[-\pi;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6};\pi\right]$$

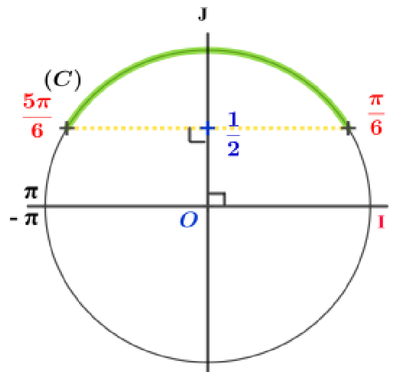
Exemples 02 :

Résolvons dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$
l'inéquation (I_2): $\sin x > \frac{1}{2}$

Les solutions de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$

dans $[-\pi;\pi]$ sont :

$$\frac{\pi}{6} \text{ et } \frac{5\pi}{6}$$



À partir de la figure ci-contre, on déduit que l'ensemble des solutions dans $[-\pi;\pi]$ de (I_2) est :

$$S_2 = \left]\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right[$$

3) Equations du type $\tan x = a$
et inéquations $\tan x \leq a$ ou $\tan x \geq a$

a) Equations du type $\tan x = a$:

Propriété :

On considère l'équation : $\tan x = a$ où $a \in \mathbb{R}$.
Soit S son ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$.
Il existe un nombre réel α de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\alpha = a$
et on a : $S = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque :

On cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = tan(\alpha)$ d'où :
$tan(x) = a$ équivaut à: $tan(x) = tan(\alpha)$
équivaut à : $x = \alpha + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ D
onc $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 13

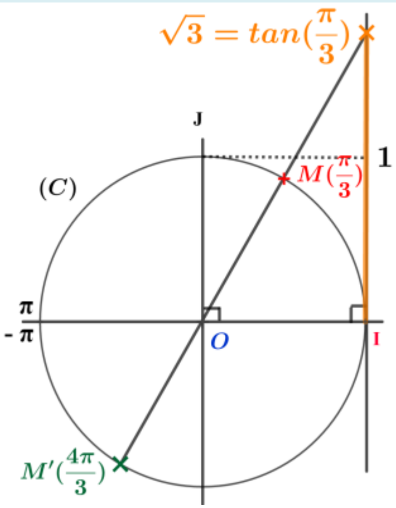
1)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\tan x = \sqrt{3}$
2)Résoudre dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'inéquation (I_1): $\tan x \leq \sqrt{3}$
3)Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation (I_2): $\tan x > \sqrt{3}$

Solution de l'exercice 11

1)Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :
$\tan x = \sqrt{3}$

On sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ et que
On en déduit que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E) est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$



2)Résolvons dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$
l'inéquation (I_1): $\tan x \leq \sqrt{3}$

➢ Les solutions de l'équation
$\tan x = \sqrt{3}$ dans$[-\pi;\pi]$ sont $-\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3}$
(de l'encadrement $-\pi \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \leq \pi$,on tire $k = -1$ et $k = 0$)
À partir de la figure en dessous, on déduit que l'ensemble des solutions dans $[-\pi;\pi]$ de (I_1)est :

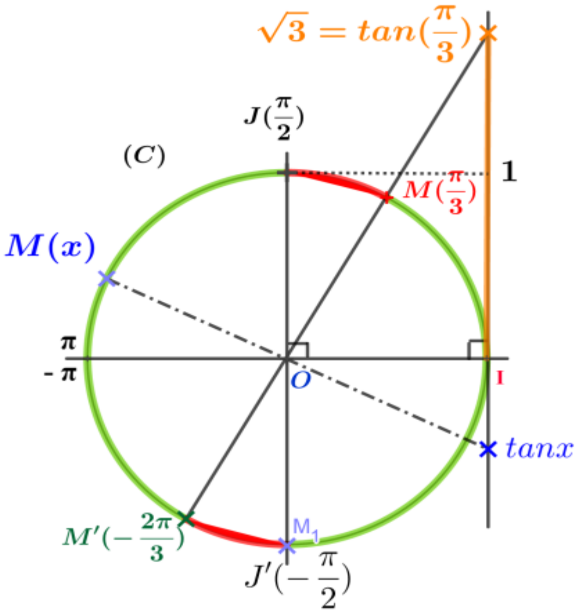
$$S = \left[-\pi;-\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$$

(les deux arcs verts)

3)Résolvons dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation
(I_2): $\tan x > \sqrt{3}$
L'ensemble des solutions de l'inéquation se lit donc sur le cercle :

$$S = \left]-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[$$

(les deux arcs rouges)

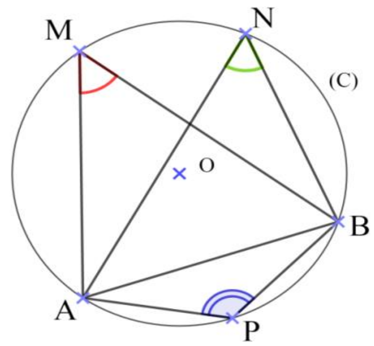


Conclusion :
Soit a un nombre réel
➢ $\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x \equiv a[2\pi]$ ou $x \equiv -a[2\pi]$
➢ $\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x \equiv a[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - a[2\pi]$
➢ $\tan(x) = \tan(a) \Leftrightarrow x \equiv a[\pi]$
➢ Cas particulier : $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}\pi$; $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi]$

VII) Les angles inscrits, les quadrilatères inscriptibles :

1) Angles inscrits- angles au centre :

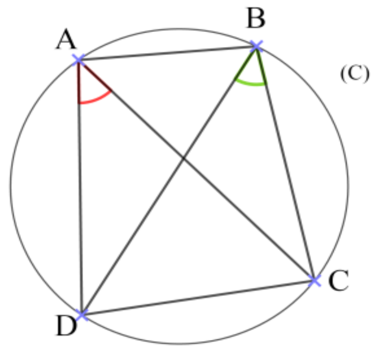
Définition et propriété:
Soit (C) un cerlce de centre O.
❖ L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé angle inscritinterceptant la corde $[AB]$
Sur le cercle (C).
❖ Deux angles inscrits, sur (C) interceptant la meme corde sont Isométriques ou supplémentaires :
$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ et $\widehat{AMB} + \widehat{APB} = \pi$

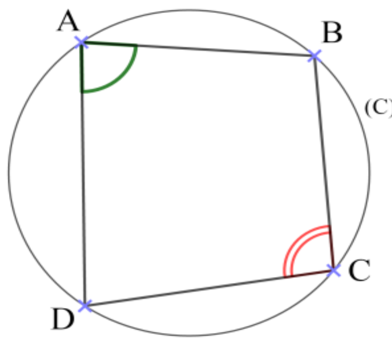


❖ L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé angle au centre.
L'angle $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$
❖ Dans un cercle, si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit.

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$$

2) Quadrilatères inscriptibles :



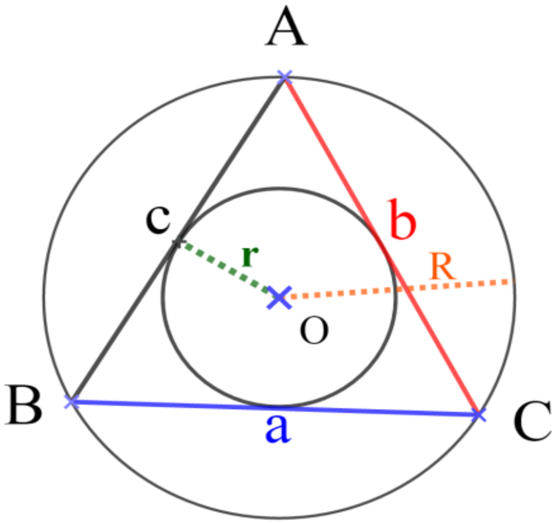


On dit que quadrilatère ABCD inscriptible si
$\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi$ ou $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$
(On dit aussi que les points A ; B ; C ; et D sont cosycliques)

3) Les relations métriques dans un triangle :

Propriétés :

Soit ABC un triangle . on pose a=BC , b=AC , c=AB .
Soient S l'aire du triangle ABC et p son périmètre (c'est-à-dire :$p = a + b + c$)
R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
r est le rayon du cercle inscrit dans triangle ABC.



On a :

- $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}$
- $S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$
- $S = \frac{1}{2}pr$
- $S = \frac{abc}{4R}$

Exercice 14

1) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 3cm$.
Calculer la surface de ce triangle.

2) Soit ABC un triangle tel que $AB = 5cm$, $\widehat{A} = \frac{\pi}{4}rad$ et $\widehat{B} = \frac{\pi}{6}rad$.

a) Calculer BC et AC.
b) Calcluer la surface de ce triangle.
c) Déterminer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
d) Déterminer le rayon du cercle inscrit dans triangle ABC.

Solution de l'exercice 11

1) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 3cm$.

Donc $\widehat{C} = \frac{\pi}{3}rad$ ET $AB = AC = BC = 3cm$

Donc la surface de ce triangle est : $S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$

2) Soit ABC un triangle tel que $AB = 5cm$, $\widehat{A} = \frac{\pi}{4}rad$ et $\widehat{B} = \frac{\pi}{6}rad$.

a) Calculer BC et AC.

Utiliser la relation : $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$

b) Calcluer la surface de ce triangle.

Utiliser la relation : $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2S}$

c) Déterminer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Utiliser la relation : $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$

d) Déterminer le rayon du cercle inscrit dans triangle ABC.

Utiliser la relation : $S = \frac{1}{2}pr$