I) Unités de mesure des angles :

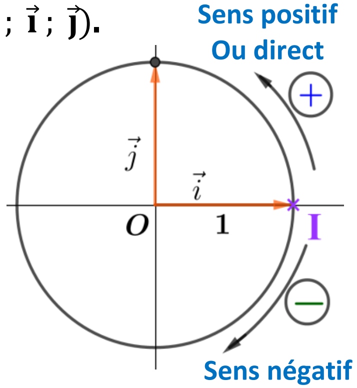
Si α , β et γ, sont les mesures respectives d'un angle géométrique en degrés, radians et en grades, alors:

$$\frac{\alpha}{180}=\frac{\beta}{\pi}=\frac{\gamma}{200}$$

II) Cercle trigonométrique-Abscisses curvilignes d'un point

1) Cercle trigonométrique :

Le plan est muni d'un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.
On appelle cercle trigonométrique le cercle orienté de centre O et de rayon 1.
Sur ce cercle, on définit une origine I et deux sens



- Le sens direct (ou sens positif), est le sens inverse des aiguilles d'une montre
- Le sens indirect (ou sens négatif), est le sens des aiguilles d'une montre.

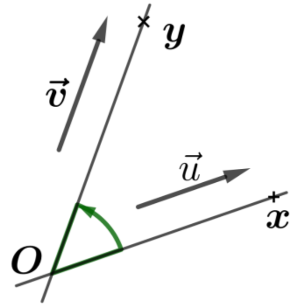
2) Abscisses curvilignes d'un point d'un Cercle trigonométrique :

Soit $(\mathcal{C})$un cercle trigonométrique de centre O, d'origine I.
Soit x un nombre réel.

- ✓ Dans le cas où $x \geq 0$, on considère le point M de$(\mathcal{C})$ tel que la mesure en radians de la longueur de l'arc IM est x lors du déplacement sur $(\mathcal{C})$ dans le sens positif.
- ✓ Dans le cas où $x < 0$, on considère le point M de $(\mathcal{C})$ tel que la mesure en radians de la longueur de l'arc IM est $-x$ lors du déplacement sur $(\mathcal{C})$ dans le sens négatif.
- ✓ Dans les deux cas x s'appelle abscisse curviligne du point M sur $(\mathcal{C})$ et on écrit $M(x)$.
- ✓ Si x est une abscisse curviligne du point M sur$(\mathcal{C})$, alors $x+k(2\pi)$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, est une abscisse curviligne de M.
- ✓ Si $\in\,]-\pi,\pi]$, on dit que x est l'abscisse curviligne principale du point M . L'abscisse curviligne principale est unique.

III) Angle orienté de deux vecteurs et ses mesures :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et O un point du plan.
On considère les deux demi-droites $[Ox)$et $[Oy)$ telles que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $[Ox)$ et $\vec{v}$ de $[Oy)$.

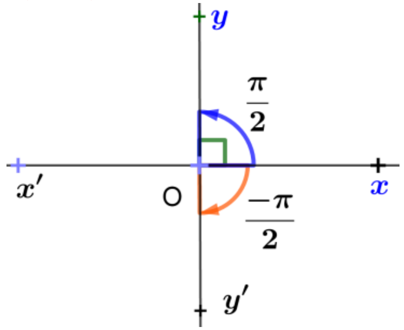


- ✓ L'angle orienté des deux vecteurs déterminé par le couple $(\vec{u}\,,\vec{v})$ est l'angle orienté$(\widehat{Ox,Oy})$, on le note$(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}})$.
- ✓ Les mesures de $(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}})$sont les mesures de $(\widehat{Ox,Oy})$ et sont notées$\overline{(\vec{u}\,,\vec{v})}$.
- ✓ Si on note a l'une de ces mesures par $\overline{(\vec{u}\,,\vec{v})}$, on peut écrire :

$$\overline{(\vec{u}\,,\vec{v})}=a+k(2\pi),\text{ où } k\in\mathbb{Z} \text{ ou bien } \overline{(\vec{u}\,,\vec{v})}\equiv a[2\pi]$$

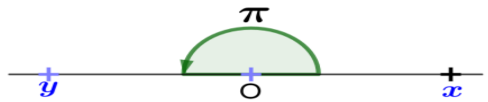
➢ Sur la figure ci-contre : $(x'x)\perp(y'y)$

On a : $\begin{cases}\overline{(Ox,Oy)}=\frac{\pi}{2}+k(2\pi),\text{ où } k\in\mathbb{Z}\\ \overline{(Ox,Oy')}=-\frac{\pi}{2}+k(2\pi),\text{ où } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

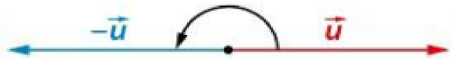


➢ En dessous on a :

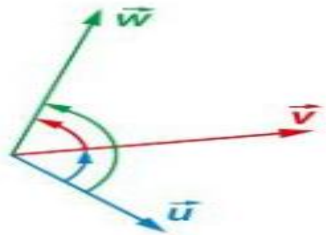
$\overline{(Ox,Oy)}=\pi+k(2\pi)$, où $k\in\mathbb{Z}$



Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls ,on a :



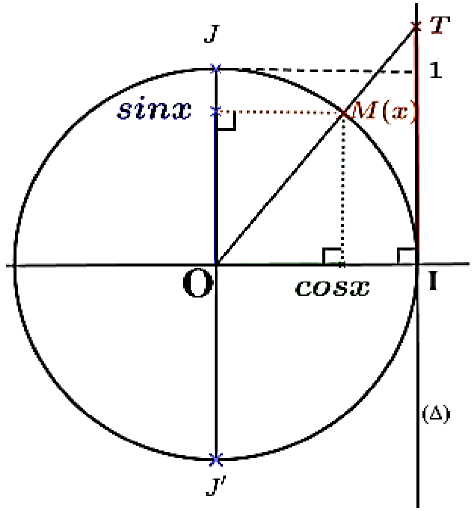
- ✓ $\overline{(\vec{u}\,,\vec{u})}=2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$
- ✓ $\overline{(\vec{u}\,,-\vec{u})}=\pi+k(2\pi)$ où $k\in\mathbb{Z}$
- ✓ $\overline{(\vec{v}\,,\vec{u})}=-\overline{(\vec{u}\,,\vec{v})}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$
- ✓ $\overline{(-\vec{u}\,,-\vec{v})}=\overline{(\vec{u}\,,\vec{v})}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$
- ✓ $\overline{(-\vec{u}\,,\vec{v})}=\overline{(\vec{u}\,,\vec{v})}+\pi+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$
- ✓ $\overline{(\vec{u}\,,\vec{v})}+\overline{(\vec{v}\,,\vec{w})}=\overline{(\vec{u}\,,\vec{w})}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$



IV) Rapports trigonométriques d'un nombre réel :

1) Cosinus ; sinus et tangente d'un nombre réel :

Définitions :



✶ L'abscisse x_M du point M, dans le repère orthonormé$(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$, est appelée **cosinus** de x et on écrit $\cos x = x_M$.

✶ L'ordonnée y_M du point M, dans le repère orthonormé$(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ est appelée **sinus** de x et on écrit $\sin x = y_M$.

✶ Soit x un réel différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Propriétés :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

✶ $-1 \le \cos x \le 1$ et $-1 \le \sin x \le 1$

✶ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; (c'est-à-dire $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$)

✶ $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

✶ *et* $|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

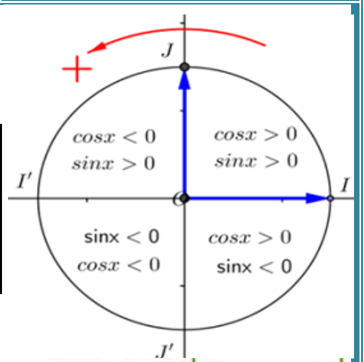
✶ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; Pour tout $k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Tableau des angles remarquables :

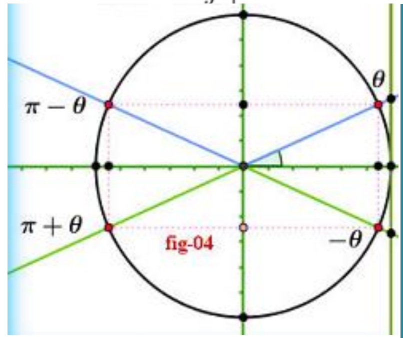
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

➤ **Tableau de singes de $\cos x$ et $\sin x$ où $x \in]-\pi, \pi]$:**

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\sin x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0



2) Relation trigonométrique :



➤ $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta)$; $k \in \mathbb{Z}$

➤ $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta)$; $k \in \mathbb{Z}$

➤ $\tan(x + 2k\pi) = \tan x$ avec $k \in \mathbb{Z}$

➤ $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$; $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

➤ $\tan(-x) = -\tan x$

➤ $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$

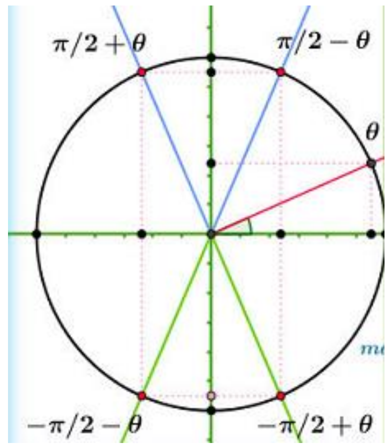
➤ $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$

➤ $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$

➤ $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$

➤ $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$

➤ $\tan(x + \pi) = \tan x$



➤ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

➤ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

➤ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

➤ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

➤ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$; $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$; $x \ne k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

V) Inéquations trigonométrique :

➤ $\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x \equiv a[2\pi]$ ou $x \equiv -a[2\pi]$

➤ $\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x \equiv a[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - a[2\pi]$

➤ $\tan(x) = \tan(a) \Leftrightarrow x \equiv a[\pi]$